

文章编号: 1000-5013(2012)02-0125-04

# 3 种构型的 6 自由度绳牵引门式起重机器人的运动学位置逆解分析

于 兰, 郑 亚 青

(华侨大学 机电及自动化学院, 福建 厦门 361021)

**摘要:** 借助 Matlab 软件,通过运动学逆解分析 3 种不同构型配置的 6 自由度起重机器人机构的运动学欠约束问题. 研究结果表明:对 3 根绳牵引的 6 自由度起重机器人机构构型的改进中,3 根主梁互相平行的机构是运动学位置逆解欠约束的,而其他两种机构的约束是充分的,改进的机构不都是运动学约束充分的.

**关键词:** 绳牵引; 起重机器人; 欠约束; 位置逆解

**中图分类号:** TH 213.502.2      **文献标志码:** A

绳牵引并联机器人是一种特殊类型的并联机器人,它具有结构简单、惯性小、工作空间大和运动速度快等优点. 根据矢量封闭原理,绳牵引并联机器人一般分为 4 类<sup>[1]</sup>,其中当绳的根数  $m$  小于末端执行器的自由度  $n$  时,称为欠约束定位机构(URPMs). 针对第 4 类绳牵引并联起重机器人的机构欠约束的缺点,前人对其机构进行 3 种改进<sup>[2-5]</sup>. 本文主要研究这 3 种构型的运动学位置逆解的欠约束问题,探讨前人对 3 根绳牵引的 6 自由度(DOF)起重机器人的构型改进的合理性.

## 1 运动学位置逆解建模

6 自由度绳牵引并联起重机器人的 3 种机构改进,如图 1 所示.

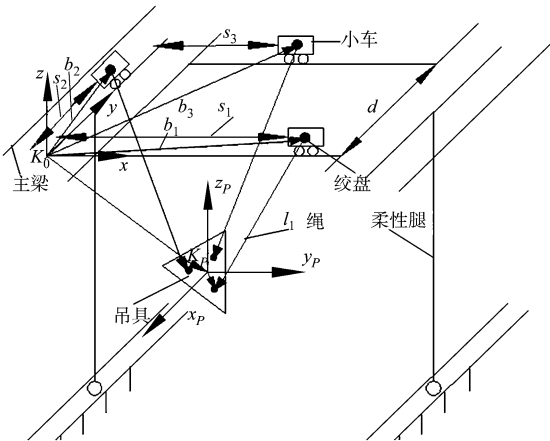
### 1.1 机器人与吊具的坐标系

独立可控的机器人驱动器坐标  $\boldsymbol{q}=(s_1,s_2,s_3;l_1,l_2,l_3)^T$ . 其中:小车位置向量  $\boldsymbol{q}_1=(s_1,s_2,s_3)^T$ ;绳长向量  $\boldsymbol{q}_2=(l_1,l_2,l_3)^T$ . 吊具参考点  $P$  的位姿  $\boldsymbol{y}_P=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha})^T$ ,  $\boldsymbol{r}=(r_x,r_y,r_z)^T$ ,  $\boldsymbol{\alpha}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)^T$ ,它描述了吊具参考点  $P$  在固定坐标系  $K_0$  的空间位置  $\boldsymbol{r}$ ,以及固定在吊具参考点  $P$  的活动坐标系  $K_P$  相对于  $K_0$  的姿态  $\boldsymbol{\alpha}$ . 图 1(a)中主梁 1 和主梁 3 之间的距离是  $d$ ,图 1(b)中主梁 3 的长度为  $d$ ,图 1(c)中主梁 1 和主梁 2,主梁 2 和主梁 3 的距离均是  $d$ .

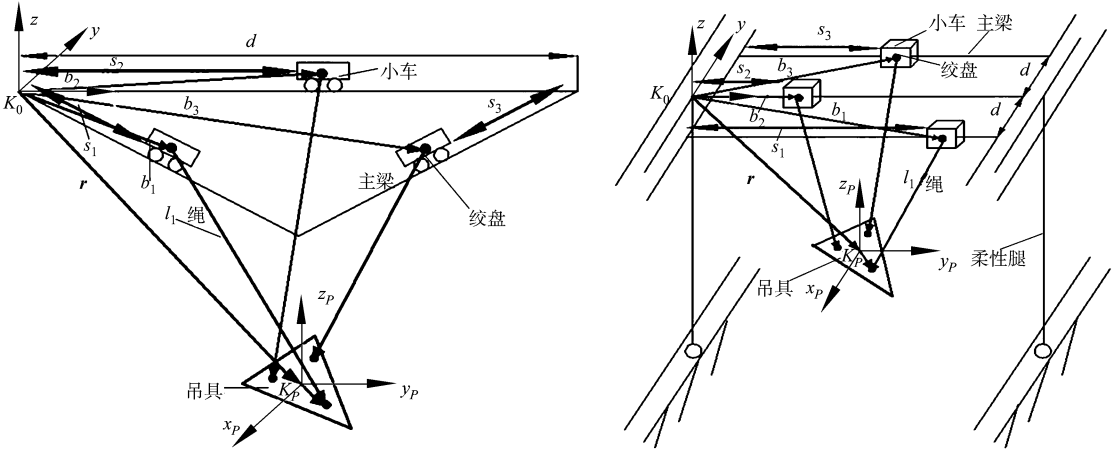
吊具相对于  $K_0$  的空间速度  $\dot{\boldsymbol{s}}_P=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})^T$ , 平动速度  $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}_P=(\dot{r}_x,\dot{r}_y,\dot{r}_z)^T$ , 而吊具相对于  $K_0$  的角速度  $\boldsymbol{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)^T$ . 位姿对时间的导数  $\dot{\boldsymbol{y}}_P=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}_P)\dot{\boldsymbol{s}}_P^{[6]}$ .

### 1.2 约束方程

运动学位置逆解就是给定已知的位姿  $\boldsymbol{y}_P$ ,求得  $\boldsymbol{q}$ . 但 3 根绳长的运动学方程只有 3 个,还需要另 3 个方程来建立,以求得  $\boldsymbol{q}$ .



(a) 垂直构型



(b) 三角形构型

(c) 平行构型

图 1 3 根绳牵引的 6 自由度起重机器人机构简图

Fig. 1 Mechanism sketch of 6-DOF wire-driven gantry crane robot with 3 wires

1. 2. 1 位置级别的约束 3 根绳存在介于机器人驱动器坐标  $\boldsymbol{q}$  与吊具位姿坐标  $\boldsymbol{y}_p$  之间的 3 个几何约束方程,可表示为

$$g_i(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{y}_p) = \boldsymbol{l}_i^T \boldsymbol{l}_i - \|\boldsymbol{l}_i\|^2 = 0. \tag{1}$$

绳向量  $\boldsymbol{l}_i(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{y}_p)$  在坐标系  $K_0$  下可表示为

$$\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{r} + {}^P\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}) {}^P\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{b}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

式(2)中:  ${}^P\boldsymbol{p}_1 = (\frac{\sqrt{3}l}{3}, 0, 0)^T$ ;  ${}^P\boldsymbol{p}_2 = (-\frac{\sqrt{3}l}{6}, -\frac{l}{2}, 0)^T$ ;  ${}^P\boldsymbol{p}_3 = (-\frac{\sqrt{3}l}{6}, \frac{l}{2}, 0)^T$ ;  $l$  为等边三角形吊具的边长;  ${}^P\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{T}_z(\varphi_3)\boldsymbol{T}_y(\varphi_2)\boldsymbol{T}_x(\varphi_1)$  是从  $K_P$  到  $K_0$  的坐标系变换矩阵<sup>[6]</sup>.

1. 2. 2 速度级别的约束 将式(1)对时间求导,有:

$$\dot{\boldsymbol{g}}_i = 2\boldsymbol{l}_i^T \dot{\boldsymbol{l}}_i - 2\|\boldsymbol{l}_i\|\dot{\boldsymbol{l}}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

将式(2)中的绳长向量对时间  $t$  求导,可得

$$\dot{\boldsymbol{l}}_i = \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{p}}_i - \dot{\boldsymbol{b}}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

而  $\boldsymbol{p}_i(i=1, 2, 3)$  对时间  $t$  的求导  $\dot{\boldsymbol{p}}_i$  可由吊具的角速度  $\boldsymbol{\omega}$  来表达,有

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{p}_i, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T. \tag{5}$$

由式(2),(4)和式(5)代入式(3)可得

$$\dot{\boldsymbol{g}} \equiv \boldsymbol{G}_s(\boldsymbol{q}_1; \boldsymbol{y}_p)\dot{\boldsymbol{s}}_P + \boldsymbol{G}_q(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{y}_p)\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}. \tag{6}$$

约束矩阵  $\boldsymbol{G}_s(\boldsymbol{q}_1; \boldsymbol{y}_p)$  满足

$$\boldsymbol{G}_s(\boldsymbol{q}_1; \boldsymbol{y}_p) = 2 \begin{bmatrix} l_{1,x} & l_{1,y} & l_{1,z} & 0 & -\frac{\sqrt{3}l}{3}l_{1,z} & \frac{\sqrt{3}l}{3}l_{1,y} \\ l_{2,x} & l_{2,y} & l_{2,z} & -\frac{l}{2}l_{2,z} & \frac{\sqrt{3}l}{6}l_{2,z} & \frac{l}{2}l_{2,x} - \frac{\sqrt{3}l}{6}l_{2,y} \\ l_{3,x} & l_{3,y} & l_{3,z} & \frac{l}{2}l_{3,z} & \frac{\sqrt{3}l}{6}l_{3,z} & -\frac{l}{2}l_{3,x} - \frac{\sqrt{3}l}{6}l_{3,y} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{G}_T, \boldsymbol{G}_R] \in \mathbf{R}^{3 \times 6}.$$

式中:  $\boldsymbol{l}_1 = (l_{1,x}, l_{1,y}, l_{1,z})^T$ ;  $\boldsymbol{l}_2 = (l_{2,x}, l_{2,y}, l_{2,z})^T$ ;  $\boldsymbol{l}_3 = (l_{3,x}, l_{3,y}, l_{3,z})^T$ ;  $\boldsymbol{q}_1 = (\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3)^T$ ,  $\boldsymbol{q}_2 = (\dot{l}_1, \dot{l}_2, \dot{l}_3)^T = (\|\dot{\boldsymbol{l}}\|_1, \|\dot{\boldsymbol{l}}\|_2, \|\dot{\boldsymbol{l}}\|_3)^T$ .

1. 3 吊具动力学方程

吊具的动力学方程由式  $\dot{\boldsymbol{y}}_p = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}_p)\dot{\boldsymbol{s}}_P$ , 式(1)和 6 个运动微分方程组成,如下:

$$\begin{bmatrix} m\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\theta}_P \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\theta}_P \boldsymbol{\omega}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_G \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_T^T \\ \boldsymbol{G}_R^T \end{bmatrix}_{6 \times 6} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T. \tag{7}$$

其中: $m$ 为吊具的质量; $\theta_P$ 为吊具关于 $K_P$ 的惯性张量; $F_G$ 为吊具的重力向量; $\lambda \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 为Lagrange乘子,是绳拉力坐标;3根绳的拉力 $F_i = 2l_i^T \lambda_i (i=1,2,3)$ .

广义运动学位置逆解问题可描述如下:对于给定的吊具的运动轨迹 $y_P(t)$ ,在吊具沿该轨迹处于动力学平衡时来计算机器人驱动器坐标 $q(t)$ .这样绳拉力坐标 $\lambda$ 可由式(7)的第3,4和5行求出;然后,将解得的绳拉力坐标代入式(7)的第1,2和6行求出 $q_1 = (s_1, s_2, s_3)^T$ .绳长向量 $q_2 = (l_1, l_2, l_3)^T$ 可分别由 $l_i = \|l_i\| = \sqrt{l_i^T l_i} (i=1,2,3)$ 求得,并最终得到 $q$ .

## 2 运动学位置逆解欠约束

按照前面的计算方法给定 $y_P$ ,分别对如图1所示的3个构型进行广义运动学位置逆解求 $q$ .因为对吊具的 $y_P$ 等均是符号值,所以求得的解均是符号解.

1) 对图1(a)的构型进行运动学逆解.

其绳拉力坐标:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{6}[-m\dot{v}_z + mgl + \frac{\sqrt{3}ml^2}{3}(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z)]/(r_z - \frac{\sqrt{3}}{3}l\sin\varphi_2)l; \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{6}[-m\dot{v}_z + mgl + \frac{ml^2}{2}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) - \frac{\sqrt{3}ml^2}{6}(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z)]/(r_z + \frac{\sqrt{3}}{6}l\sin\varphi_2 - \frac{l}{2}\sin\varphi_1\cos\varphi_2)l; \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{6}[-m\dot{v}_z + mgl + \frac{ml^2}{2}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) - \frac{\sqrt{3}ml^2}{6}(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z)]/(r_z + \frac{\sqrt{3}}{6}l\sin\varphi_2 + \frac{l}{2}\sin\varphi_1\cos\varphi_2)l.\end{aligned}$$

而小车位置:

$$\begin{aligned}s_1 &= (\lambda_1 h_1 + 2\lambda_2 l_{2,x} + \sqrt{3}\lambda_1 l_{1,y} - \frac{\sqrt{3}}{6}m\dot{v}_y - \frac{1}{2}m\dot{v}_x)/\lambda_1; \\ s_2 &= (\lambda_1 l_{1,y} + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 l_{3,y} - \frac{1}{2}m\dot{v}_y)/\lambda_2; \\ s_3 &= -(\sqrt{3}\lambda_1 l_{1,y} + \lambda_2 l_{2,x} - \lambda_3 h_3 - \frac{\sqrt{3}}{6}m\dot{v}_y)/\lambda_3.\end{aligned}$$

其中: $h_1 = r_x + \frac{\sqrt{3}}{3}l\cos\varphi_2\cos\varphi_3$ ;  $h_2 = r_y - \frac{\sqrt{3}}{6}l\cos\varphi_2\sin\varphi_3 - \frac{1}{2}l(\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3 + \cos\varphi_1\cos\varphi_3)$ ;  $h_3 = r_x - \frac{\sqrt{3}}{6}l\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + \frac{1}{2}l(\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 - \cos\varphi_1\sin\varphi_3)$ .

相应地, $l_i = \|l_i\| = \sqrt{l_i^T l_i} (i=1,2,3)$ .由于 $l_i$ 的表达式繁琐,此处不详写.

2) 对图1(b)中的构型进行运动学逆解.

其绳拉力坐标:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{6}[-m\dot{v}_z + mgl + \frac{\sqrt{3}ml^2}{3}(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z)]/(r_z - \frac{\sqrt{3}}{3}l\sin\varphi_2)l; \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{6}[-m\dot{v}_z + mgl + \frac{ml^2}{2}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) - \frac{\sqrt{3}ml^2}{6}(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z)]/(r_z + \frac{\sqrt{3}}{6}l\sin\varphi_2 - \frac{l}{2}\sin\varphi_1\cos\varphi_2)l; \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{6}[-m\dot{v}_z + mgl + \frac{ml^2}{2}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) - \frac{\sqrt{3}ml^2}{6}(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z)]/(r_z + \frac{\sqrt{3}}{6}l\sin\varphi_2 + \frac{l}{2}\sin\varphi_1\cos\varphi_2)l.\end{aligned}$$

而小车位置:

$$\begin{aligned}s_1 &= (-0.962\lambda_1 h_1 - 0.385\lambda_3 h_5 + 0.287m\dot{v}_y + 0.333\lambda_1 h_1 + 0.6670\lambda_3 h_4 - 0.167m\dot{v}_x - 0.385\lambda_2 l_{2,y})/\lambda_1; \\ s_2 &= (0.667\lambda_1 h_1 + 0.385\lambda_1 h_2 - 0.193\lambda_3 h_5 + 0.333\lambda_3 h_4 - 0.333m\dot{v}_x - 0.192\lambda_2 l_{2,y} + \lambda_2 h_3)/\lambda_2; \\ s_3 &= -(0.193\lambda_1 h_2 + 0.770\lambda_3 h_5 - 0.285m\dot{v}_y + 0.333\lambda_1 h_1 + 0.667\lambda_3 h_4 - 0.167m\dot{v}_x + 0.770\lambda_2 l_{2,y})/\lambda_3.\end{aligned}$$

其中: $h_1 = r_x + \frac{\sqrt{3}}{3}l\cos\varphi_2\cos\varphi_3$ ;  $h_3 = r_x - \frac{\sqrt{3}}{6}l\cos\varphi_2\cos\varphi_3 - \frac{1}{2}l(\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 - \cos\varphi_1\sin\varphi_3)$ ;  $h_4 =$

$$r_x - \frac{\sqrt{3}}{6}l\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + \frac{1}{2}l(\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 - \cos\varphi_1\sin\varphi_3) - d; h_2 = r_y + \frac{\sqrt{3}}{3}l\cos\varphi_2\sin\varphi_3; h_3 = r_y - \frac{\sqrt{3}}{6}l\cos\varphi_2\sin\varphi_3 + \frac{1}{2}l(\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3 + \cos\varphi_1\cos\varphi_3).$$

相应地,  $l_i = \|\mathbf{l}_i\| = \sqrt{\mathbf{l}_i^T \mathbf{l}_i}$  可求出, 限于篇幅和表达式的繁琐, 这里不详写, 可利用 Matlab 求出.

3) 对于图 1(c) 中的构型, 只能求出绳拉力坐标, 而  $s_i$  无一般解. 这是因为在利用上述计算方法的方式(7)的 1, 2 和 6 行计算时, 只有两个关于  $s_i$  的方程, 也就是说求解  $s_i$  的方程组是欠定的.

从以上广义运动学位置逆解分析可知: 对含 3 个刚柔混合支链的 6 自由度起重机器人构型的改进中, 图 1(a) 和图 1(b) 的构型约束是充分的, 而图 1(c) 所示的构型改进的机构是欠约束的.

### 3 结束语

按广义运动学位置逆解的计算方法, 发现 3 根主梁互相平行的构型是运动学位置逆解是欠约束的, 而其他两种构型的设计是合理的. 这说明了前人提出的有些构型配置是不合理的. 所得结论对构型配置的选择和米级样机的搭建构型的选择具有一定的借鉴意义.

#### 参考文献:

- [1] MING A, HIGUCHI T. Study on multiple degree of freedom positioning mechanisms using wires (Part 1): Concept, design and control[J]. International Journal of the Japan Society for Precision Engineering, 1994, 28(2): 131-138.
- [2] ARAI T, OSUMI H. Three wire suspension robot[J]. Industrial Robot, 1992, 19(4): 17-22.
- [3] MAIER T, WOERNL E C. Flatness-based control of underconstrained cable suspension manipulators[C]// Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conference. Nevada: [s. n.], 1999: 359-369.
- [4] HEYDEN T, WOERNL E C. Dynamics and flatness-based undetermined cable suspension manipulator[J]. Multi-body System Dynamics, 2006(16): 155-177.
- [5] YAMAMOTO M, YANAI N, MOHRI A. Trajectory control of incompletely restrained parallel wire-suspended mechanism based on inverse dynamics[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2004, 20(5): 840-850.
- [6] ZHENG Ya-qing, LIN Qi, WU Jian-po, et al. Analysis of inverse kinematics and dynamics of a 6-degree-of-freedom wire-driven parallel gantry crane robot[C]// Proceedings of 2009 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Singapore: [s. n.], 2009: 1786-1791.

## Analysis of Inverse Pose Kinematics for 3 6-DOF Wire-Driven Crane Robots with Different Mechanism Configurations

YU Lan, ZHENG Ya-qing

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** The problem about kinematical under-constraint of the mechanisms of 6-DOF crane robots with 3 different kinds of mechanism configurations is investigated by analysis of their generalized inverse pose kinematics using the Matlab software. The research results have shown that among the improved mechanisms of 6-DOF crane robots with 3 wires, the mechanism with the 3 rails in parallel is kinematically underconstrained, while the constraint of the other kinds of mechanisms is enough; not all of the improved mechanisms have enough kinematical constraints.

**Keywords:** wire-driven; crane robot; under-constrained; inverse pose

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 郑亚青)