

文章编号: 1000-5013(2012)01-0117-04

# 部分二次特征值及其敏感性配置

谢溪庄

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 利用响应矩阵法配置主动振动控制中的配置特征值及其敏感性,使得特征值和敏感性配置的个数不受限制.提出用带等式约束的二次规划问题,来求解主动振动控制中单输入状态反馈控制系统的部分特征值及敏感性配置问题.数值实验表明:转化成二次规划问题来求解的方法,其特征值配置问题满足要求,敏感性配置也相对满足要求.

**关键词:** 特征值;敏感性;二次规划问题;响应矩阵法;主动振动控制

**中图分类号:** O 231.1

**文献标志码:** A

在结构动力学中,许多反特征值问题中都要求系统有特征值的敏感性.例如,在主动振动控制中不仅要求通过引入某种控制器,使得部分系统的特征值可以移动到指定的位置,从而使系统的动态性能得到改善,而且要使特征值的敏感性达到一定的要求. Ram 等<sup>[1]</sup>提出了用响应矩阵法解决主动振动控制中的特征值配置问题.对于主动振动控制中单输入状态反馈控制系统的部分特征值及敏感性配置问题<sup>[2]</sup>,Mottershead 等<sup>[3]</sup>提出可以将特征值及其敏感性配置转化成线性方程,并通过解线性方程组的方式来解决问题.然而,当方程组为超定方程组时,可能出现无解的情况.因此,本文中提出用带等式约束的二次规划问题来求解.

## 1 响应矩阵法

首先考虑二阶矩阵微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{z}(t) = 0. \quad (1)$$

式(1)中: $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  是  $n \times n$  实对称阵,  $\mathbf{M}$  是正定的,  $\mathbf{C}, \mathbf{K}$  是半正定的.通过变量分离  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}e^{\lambda t}$ , 其中  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  是一个常向量.由此可得

$$\mathbf{Q}(\lambda)\mathbf{x} = (\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{x} = 0. \quad (2)$$

记  $\mathbf{Q}(\lambda) = \lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K}$ , 矩阵多项式  $\mathbf{Q}(\lambda)$  称为开环二次束,  $(\lambda, \mathbf{x})$  称为  $\mathbf{Q}(\lambda)$  的特征对.

开环的响应矩阵的形式如下

$$\mathbf{H}(s) = (s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}, \quad (3)$$

也可以把它表示成如下形式,即

$$\mathbf{H}(s) = (s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} = \frac{\text{adj}(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})}{\det(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})} = \frac{\mathbf{N}(s)}{d(s)}. \quad (4)$$

式(4)中:  $\text{adj } \mathbf{A}$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵;  $\det \mathbf{A}$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的行列式.

## 2 响应矩阵法配置主动振动控制的特征值及其敏感性

考虑单输入状态反馈主动振动控制系统为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{z}(t) = \mathbf{b}u(t), \quad (5)$$

收稿日期: 2011-05-22

通信作者: 谢溪庄 (1981-), 男, 助教, 主要从事应用数学的研究. E-mail: xzx@hqu.edu.cn.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

$$u(t)=-\dot{f}^T\dot{z}(t)-g^Tz(t). \tag{6}$$

其中: $b,f,g\in\mathbf{R}^n$ .

结合式(5),(6)及变量分离  $z(t)=xe^{\lambda t}$ ,有

$$Q_c(\lambda)x=[\lambda^2M+\lambda(C+bf^T)+(K+bg^T)]x=0. \tag{7}$$

式(7)中: $Q_c(\lambda)=[\lambda^2M+\lambda(C+bf^T)+(K+bg^T)]$ 为闭环二次束.

由 Sherman-Amorrison 式

$$(A+uv^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u},$$

可得闭环的响应矩阵为

$$\begin{aligned} \hat{H}(s) &= [s^2M+s(C+bf^T)+(K+bg^T)]^{-1}= \\ &= H(s)-\frac{H(s)b(g+sf)^TH(s)}{1+(g+sf)^TH(s)b}. \end{aligned}$$

部分特征值配置问题就是给定  $M,C,K\in\mathbf{R}^{n\times n}$ , 向量  $b\in\mathbf{R}^n$ , 集合  $L=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p\}$ , 满足当  $\mu_j\in L$  时,  $\bar{\mu}_j\in L$  且  $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p\}\cap\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{2n}\}=\emptyset$ , 其中  $\lambda_i$  为  $Q(\lambda)$  的特征值. 求得  $f,g\in\mathbf{R}^n$ , 使得  $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p\}$  为  $Q_c(\lambda)$  的  $p$  个特征值.

若  $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p\}$  为  $Q_c(\lambda)$  的  $p$  个特征值, 由文献[3]可知

$$1+(g+sf)^TH(\mu_j)b=0, \quad j=1,2,\cdots,p. \tag{8}$$

令  $\gamma_j(u_j)=H(u_j)b$ , 有

$$\gamma_j^T(u_j)(g+u_jf)=-1, j=1,\cdots,p,$$

或

$$\gamma_j^Tg+u_j\gamma_j^Tf=-1, j=1,\cdots,p.$$

可写成线性方程组为

$$G\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}=c, \tag{9}$$

其中: $G=\begin{pmatrix} \gamma_1^T & \mu_1\gamma_1^T \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_p^T & \mu_p\gamma_p^T \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$

由式(9)可知, 当  $L=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p\}$  满足  $\mu_j\in L, \bar{\mu}_j\in L$  时,  $f$  和  $g$  是实向量, 且当  $p<2n$  时, 线性方程组(9)有无数多个解. 另外, 由文献[3]可以得到特征值关于向量  $g$  的敏感性为

$$S_{j,i}^g=\frac{\partial\mu_j}{\partial g_i}=\frac{-e_i^TN(\mu_j)b}{\frac{\partial d}{\partial s}\big|_{s=\mu_j}+(g+\mu_jf)^T\frac{\partial N}{\partial s}\big|_{s=\mu_j}b+f^TN(\mu_j)b}, \tag{10}$$

特征值关于向量  $f$  敏感性为

$$S_{j,i}^f=\frac{\partial\mu_j}{\partial f_i}=\frac{-\mu_je_i^TN(\mu_j)b}{\frac{\partial d}{\partial s}\big|_{s=\mu_j}+(g+\mu_jf)^T\frac{\partial N}{\partial s}\big|_{s=\mu_j}b+f^TN(\mu_j)b}. \tag{11}$$

如果给定敏感性的值  $S_{j,i}^g=\alpha_{i,j}$ , 就得到关于  $f$  和  $g$  的线性方程. 以  $g$  的扰动为例, 记

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{\partial N}{\partial s}\big|_{s=\mu_j}b, \\ c_j &= \mu_j\frac{\partial N}{\partial s}\big|_{s=\mu_j}b+N(\mu_j)b, \\ y_{j,i} &= -\frac{e_i^TN(\mu_j)b}{\alpha_{i,j}}-\frac{\partial d}{\partial s}\big|_{s=\mu_j}, \end{aligned}$$

则有

$$F\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}=d. \tag{12}$$

其中：
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_t^\top & \mathbf{c}_t^\top \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_k^\top & \mathbf{c}_k^\top \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t,i} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k,i} \end{bmatrix}, t, k \in \{1, 2, \dots, p\}, i \in \{1, \dots, m\}.$$

### 3 带等式约束的二次规划问题

对特征值的配置与对其敏感性的配置都可以转化成求解关于  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{g}$  的线性方程组. 令  $\mathbf{u} = (\mathbf{g}^\top \mathbf{f}^\top)^\top$ , 要对两者同时进行配置时, 结合式(9)和式(12)可以求解下面的二次规划问题<sup>[4]</sup>, 即

$$\min q(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F}\mathbf{u} - d\|_F^2, \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{c}. \tag{13}$$

其中:  $\|\cdot\|_F$  为  $F$ -范数.

当  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  是满秩矩阵时,  $q(\mathbf{u})$  是强凸函数,  $\Omega = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{2n} \mid \mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{c}\}$  是一个闭凸集, 二次规划问题(13)有唯一解, 且等价于求解下面的线性方程组, 即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}^H \mathbf{F} & -\mathbf{G}^H \\ \mathbf{G} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^H d \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}.$$

其中:  $\mathbf{F}^H$  为  $\mathbf{f}$  的共轭转置阵<sup>[5]</sup>.

Mottershead 等<sup>[3]</sup>提出通过下面的线性方程组来求解  $\mathbf{g}$  和  $\mathbf{f}$ , 即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ d \end{pmatrix}. \tag{14}$$

当线性方程组(14)有解时, 与式(13)中  $\min q(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F}\mathbf{u} - d\|_F^2 = 0$  的情况是等价的. 因此, 线性方程组(14)可以求解的问题, 二次规划问题(13)同样可以求解. 当线性方程组(14)为超定方程组时, 就无法求解  $\mathbf{g}$  和  $\mathbf{f}$ , 而二次规划问题(13)却可以求解出  $\mathbf{g}$  和  $\mathbf{f}$ , 不仅可以配置特征值, 也可以使其敏感性满足一定的要求.

**注 1** 当  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  不是满秩矩阵时, 可以先将线性方程组(14)的系数矩阵进行 QR 分解, 提取其中满秩的部分, 建立新的二次规划问题进行求解.

### 4 数值实验

设  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{b}$  具有下面的形式, 即

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

其开环的特征值为  $\lambda_{1,2} = -0.0166 \pm 0.5516i, \lambda_{3,4} = -0.2528 \pm 2.2289i, \lambda_{5,6} = -0.2528 \pm 2.2289i$ .

**例 1** 将前面 4 个开环特征值  $\lambda_{1,2}, \lambda_{3,4}$  替换为  $u_{1,2} = -0.02 \pm 0.8i, u_{3,4} = -0.3 \pm 1.9i$ , 给定  $u_{3,4} = -0.3 \pm 1.9i$ , 相对于  $\mathbf{g}$  的第 1 个分量的敏感性为  $S_{3,1}^g = -0.05 + 0.08i, S_{4,1}^g = -0.05 - 0.08i$ . 可求解下面的线性方程组(14), 得唯一解为

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 3.0096 \\ 1.8692 \\ -1.8004 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1.4659 \\ -1.4448 \\ 0.3798 \end{bmatrix}.$$

同样, 由(13)可求得

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 3.0096 \\ 1.8692 \\ -1.8004 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1.4659 \\ -1.4448 \\ 0.3798 \end{bmatrix}.$$

其相应的闭环特征值为  $u_{1,2} = -0.02 \pm 0.8i, u_{3,4} = -0.3 \pm 1.9i, u_{5,6} = 0.154\ 3 \pm 2.560\ 1i$  且  $u_{3,4}$  的敏感性  $S_{3,1}^g = -0.05 + 0.08i, S_{4,1}^g = -0.05 - 0.08i$ .

从上面的实验可以看出,在例 1 中,式(13)与式(14)的解是相同的. 此时式(13)的目标函数  $q(u) = 1.46 \times 10^{-6}$  (其值不为 0 是由于计算机的计算误差).

**例 2** 在例 1 的基础上,再给定  $u_{1,2} = -0.02 \pm 0.8i$ ,相对  $g$  的第 1 个分量的敏感性为  $S_{1,1}^g = 0.08 + 0.02i, S_{2,1}^g = 0.08 - 0.02i$ . 显然,这种情况下线性方程组(14)是一个超定方程组,无解. 只能求解二次规划问题(13)且可解得

$$g = \begin{pmatrix} 2.366\ 6 \\ 1.453\ 0 \\ -1.271\ 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1.031\ 9 \\ -0.751\ 1 \\ 0.098\ 5 \end{pmatrix}.$$

其闭环特征值为  $u_{1,2} = -0.02 \pm 0.8i, u_{3,4} = -0.3 \pm 1.9i, u_{5,6} = -0.037\ 2 \pm 2.431\ 6i$ ;而其相应的敏感性为  $S_{1,1}^g = -0.05 + 0.133\ 5i, S_{2,1}^g = -0.05 - 0.133\ 5i, S_{3,1}^g = -0.018\ 4 - 0.124\ 9i, S_{4,1}^g = -0.018\ 4 - 0.124\ 9i$ .

由此可以看到特征值配置问题满足要求,敏感性配置虽不是为给定的值,也是比较相对满足要求的. 此时,式(13)的目标函数  $q(u) = 5.06 \times 10^4$ .

参考文献:

[1] RAM Y M, MOTTERSHEAD J E. Receptance methed in active vibration control[J]. AIAA Journal, 2007, 45(3): 562-567.  
[2] 龚德恩. 利用矩阵广义逆的极点配置问题新解法[J]. 华侨大学学报:自然科学版, 2000, 21(1): 101-106.  
[3] MOTTERSHEAD J E, TEHRANI M G, RAM Y M. Assignment of eigenvalue sensitivities from receptance measurements[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(6): 1931-1939.  
[4] BERTSEKAS D P. 凸分析与优化[M]. 北京:清华大学出版社, 2007.  
[5] NOCEDAL J, WRIGHT S J. Numerical optimization[J]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

Assignment of Eigenvalue and Corresponding Sensitivities

XIE Xi-zhuang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** By means of assignment for the eigenvalue and the corresponding sensitivities in active vibration control by receptance method, the number of the assigned eigenvalue and sensitivities isn't limited. We present an equality-constrained quadratic programming method to solve the problem of eigenvalue and sensitivities assignment in active vibration control using single-input state feedback. It is shown that the eigenvalue and sensitivities can be assigned by the quadratic programming method by numerical tests.

**Keywords:** eigenvalue assignment; sensitivity; quadratic programming; receptance method; active vibration control

(责任编辑: 黄晓楠      英文审校: 张金顺, 黄心中)