第33卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 1
2012年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2012

文章编号： 1000-5013(2012)01-0112-05

奇异线性模型下最小范数二次无偏估计关于误差分布的稳健性

邱红兵[1]，罗季[2]，孙旭[3]

(1. 广东工业大学 应用数学学院，广东 广州 510006；
2. 浙江财经学院 数学与统计学院，浙江 杭州 310018；
3. 东北财经大学 统计学院，辽宁 大连 116025)

摘要： 讨论奇异线性模型下方差 σ^2 的最小范数二次无偏估计关于误差分布的稳健性问题，得到方差的最小范数二次无偏估计保持最优的误差项的最大分布类. 进一步考虑可估计函数 $\boldsymbol{X\beta}$ 的最佳线性无偏估计的稳健性，得到了 $\boldsymbol{X\beta}$ 的最佳线性无偏估计与方差 σ^2 的最小范数二次无偏估计同时最优的误差项的最大类.

关键词： 奇异线性模型；稳健性；最佳线性无偏估计；最小范数二次无偏估计

中图分类号： O 515.2；O 212.1 **文献标志码：** A

1 预备知识

令 $\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{S}^n_>$ 和 $\boldsymbol{S}^n_\geqslant$ 分别表示 n 维实的列向量、$m\times n$ 阶实矩阵、n 阶正定矩阵和 n 阶非负定矩阵；对给定的矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，用 $\boldsymbol{A}'$，rank $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^+$，$R(\boldsymbol{A})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置、秩、Moore-Penrose 逆和列向量张成的线性空间；线性子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 的维数及其正交补空间分别用 dim $R(\boldsymbol{A})$ 和 $N(\boldsymbol{A})$ 表示；$P_{\boldsymbol{A}}$ 表示到 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影阵，即 $P_{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^+\boldsymbol{A}'$，记 $Q_{\boldsymbol{A}}=I-P_{\boldsymbol{A}}$. 考虑线性模型

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{e}. \tag{1}$$

式(1)中：$\boldsymbol{y}$ 为 $n\times 1$ 的随机观测向量；$\boldsymbol{X}$ 为已知的 $n\times p$ 设计阵，且 rank $\boldsymbol{X}=r\leqslant p$；$\boldsymbol{\beta}$ 为 $p\times 1$ 的固定效应向量；$\boldsymbol{e}$ 为 $n\times 1$ 的随机误差向量.

记 $\boldsymbol{Z}$ 为满足 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}=0$ 的列满秩矩阵，则此时 $Q_{\boldsymbol{X}}=I-P_{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'$.

在线性模型(1)中，误差项 $\boldsymbol{e}$ 的分布记为 $\Phi(\boldsymbol{e})$，用 $\wp(\mu,V)$ 表示期望为 μ，协方差阵为 σ^2V 的分布族，其中 $V\in\boldsymbol{S}^n_\geqslant$. 线性模型(1)包含了许多重要应用统计模型，如异方差回归模型、混合效应模型等. 当 $V=V(\theta)$(即 V 可包含未知参数 θ)时，此时 θ 就是通常的方差分量. 记

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{X})^+\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{y}-\mu),$$
$$\hat{\sigma}^2(\mu,\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{y}-\mu)'[\boldsymbol{A}^+-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{X})^+\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}^+](\boldsymbol{y}-\mu),$$
$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{A})\triangleq\hat{\boldsymbol{\beta}}(0,\boldsymbol{A}),\qquad \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{A})\triangleq\hat{\sigma}^2(0,\boldsymbol{A}).$$

在线性模型(1)下，设 $\Phi(\boldsymbol{e})\in\wp(\mu,V)$，当 μ 和 θ 已知时，$\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mu,\Sigma)$ 就是模型(1)下参数 $\boldsymbol{X\beta}$ 的最佳线性无偏估计(BLUE). 这里，$\Sigma=V+\boldsymbol{XUX}'$，且使 $R(\boldsymbol{X}\vdots V)=R(\Sigma)$；记 $f_v\triangleq\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}\vdots V)-\mathrm{rank}\,\boldsymbol{X}$，则此时 $1/f_v\hat{\sigma}^2(\mu,\Sigma)$ 就为 σ^2 的最小范数二次无偏估计(MINQUE)[1-2]. 但在实际应用中，μ 与 θ 往往是未知的，此时 $V(\theta)$ 也是未知的，因此，所谓“估计”$\boldsymbol{X\beta}(\mu,\Sigma(\theta))$ 和 $1/f_v\hat{\sigma}^2(\mu,\Sigma(\theta))$ 都是不可行的.

在此情形下，通常采用两步估计的方法，先根据观测数据得到 μ 与 θ 的某种估计 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\theta}$，然后用 $\hat{\mu}$ 和 $\Sigma(\hat{\theta})$ 代替 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mu,\Sigma(\theta))$ 和 $1/f_v\hat{\sigma}^2(\mu,\Sigma(\theta))$ 中的 μ 与 $\Sigma(\theta)$，进而得到 $\boldsymbol{X\beta}$ 与 σ^2 的两步估计 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\mu},\Sigma(\hat{\theta}))$

收稿日期： 2011-07-11

通信作者： 邱红兵(1974-)，男，副教授，主要从事数理统计的研究. E-mail：qhongbing@163.com.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11171058)；国家社会科学基金资助项目(11CTJ008)；浙江省自然科学基金资助项目(Y6110615)

和 $1/f_v\hat{\sigma}^2(\hat{\mu},\Sigma(\hat{\theta}))$. 但两步估计的统计性质往往比较复杂，并且 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\mu},V(\hat{\theta}))$ 和 $1/f_v\hat{\sigma}^2(\hat{\mu},\Sigma(\hat{\theta}))$ 不一定还保持 BLUE 和 MINQUE 的特性.

对于线性模型中参数估计的稳健性研究，大多是讨论可估函数 $A\beta$ 的估计的稳健性问题[2-8]. 文献[8]给出了关于 $\boldsymbol{X\beta}$ 的估计的稳健性，给出了 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\Sigma)=\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(T)$ 的充分必要条件为

$$\boldsymbol{P_X T^+} V\boldsymbol{Q_X}=0. \tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{S}^n_{\geqslant}$. 显然，式(2)成立，当且仅当

$$\boldsymbol{X'T^+} V\boldsymbol{Z}=0. \tag{3}$$

对 σ^2 的 MINQUE 的稳健性研究，主要集中在讨论 $\hat{\sigma}^2(V)/f_v$ 与 $\hat{\sigma}^2(I)/(n-r)$ 的等价问题上. 文献[9]给出了 $\hat{\sigma}^2(V)=\hat{\sigma}^2(I)$ 的一个充分必要条件

$$V\boldsymbol{Q_X}V\boldsymbol{Q_X}V=V\boldsymbol{Q_X}V. \tag{4}$$

文献[10]研究当 $V\in\boldsymbol{S}^n_{>}$ 时，σ^2 的 MINQUE 的稳健性. 文献[11]讨论了当 $V\in\boldsymbol{S}^n_{\geqslant}$ 时的情形，得到了 $\hat{\sigma}^2(\Sigma)/f_v=a^2\hat{\sigma}^2(I)$ 的充分必要条件，以及在 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\Sigma)=\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(I)$ 的条件下，$\hat{\sigma}^2(\Sigma)/f_v$ 与 $a^2\hat{\sigma}^2(I)$ 等价的条件.

以下讨论均假定 $\boldsymbol{T}$ 为满足 $R(V\vdots\boldsymbol{X})\subset R(\boldsymbol{T})$ 的非负定矩阵.

2　基本引理

引理 1[2]　在线性模型(1)下，设 $\Phi(\boldsymbol{e})\in\wp(\mu,V)$，则有

$$P\{(\boldsymbol{y}-\mu)\in R(\boldsymbol{X}\vdots V)\}=1.$$

即 $(\boldsymbol{y}-\mu)\in R(\boldsymbol{X}\vdots V)$ 几乎处处成立.

因此，文中含 $\boldsymbol{y}$ 的等式均是在几乎处处意义成立，以下不再一一说明.

引理 2　给定矩阵 $\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{S}^n_{\geqslant}$，且满足 $R(\boldsymbol{X})\subset R(\boldsymbol{T})$，$\boldsymbol{Z}$ 为满足 $\boldsymbol{X'Z}=0$ 的列满秩矩阵，记 $\boldsymbol{T}_0=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'T^+X})^+\boldsymbol{X'T^+}+\boldsymbol{TZ}(\boldsymbol{Z'TZ})^+\boldsymbol{Z'}$，则下列结论成立：

ⅰ) $R(\boldsymbol{T})=R(\boldsymbol{X}\vdots\boldsymbol{TZ})=R(\boldsymbol{T}_0)$；

ⅱ) $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'T^+X})^+\boldsymbol{X'}+\boldsymbol{TZ}(\boldsymbol{Z'TZ})^+\boldsymbol{Z'T}=\boldsymbol{T}$.

条件ⅰ)证明．设 $\boldsymbol{t}\in R(\boldsymbol{X})\cap R(\boldsymbol{TZ})$，则存在 $\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2\in\boldsymbol{R}^n$，使得 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{Xt}_1=\boldsymbol{TZt}_2$. 上式两边同时左乘 $\boldsymbol{t'}_2\boldsymbol{Z'}$，利用 $\boldsymbol{Z'X}=0$，得 $\boldsymbol{t'}_2\boldsymbol{Z'Xt}_1=\boldsymbol{t'}_2\boldsymbol{Z'TZt}_2=0$. 从而 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{TZt}_2=0$，故 $R(\boldsymbol{X})\cap R(\boldsymbol{TZ})=\{0\}$.

另一方面，由文献[12]定理 2.3 有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{TZ})=\operatorname{rank}\boldsymbol{T}-\dim[R(\boldsymbol{T})\cap N(\boldsymbol{Z'})]=$$
$$\operatorname{rank}\boldsymbol{T}-\dim[R(\boldsymbol{T})\cap R(\boldsymbol{X})]=\operatorname{rank}\boldsymbol{T}-\operatorname{rank}\boldsymbol{X},$$

从而有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{T}=\operatorname{rank}\boldsymbol{X}+\operatorname{rank}(\boldsymbol{TZ})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{X}\vdots\boldsymbol{TZ}).$$

结合 $R(\boldsymbol{X}\vdots\boldsymbol{TZ})\subset R(\boldsymbol{T})$，即得 $R(\boldsymbol{T})=R(\boldsymbol{X}\vdots\boldsymbol{TZ})$.

因为 $\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{TZ}=\boldsymbol{TZ}$，所以 $R(\boldsymbol{X})\subset R(\boldsymbol{T}_0)$，$R(\boldsymbol{TZ})\subset R(\boldsymbol{T}_0)$，从而有 $R(\boldsymbol{T})=(\boldsymbol{X}\vdots\boldsymbol{TZ})\subset R(\boldsymbol{T}_0)$. 又显然有 $\boldsymbol{T}_0\in R(\boldsymbol{X}\vdots\boldsymbol{TZ})$，故有 $R(\boldsymbol{T})=R(\boldsymbol{X}\vdots\boldsymbol{TZ})=R(\boldsymbol{T}_0)$.

条件ⅱ)证明．由条件ⅰ)可知，$R(\boldsymbol{T})=(\boldsymbol{X}\vdots\boldsymbol{TZ})$，不妨设 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{X}D_1+\boldsymbol{TZ}D_2$，则有

$$\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'T^+X})^+\boldsymbol{X'T^+}+\boldsymbol{TZ}(\boldsymbol{Z'TZ})^+\boldsymbol{Z'}](\boldsymbol{X}D_1+\boldsymbol{TZ}D_2)=\boldsymbol{X}D_1+\boldsymbol{TZ}D_2=\boldsymbol{T}.$$

即有

$$[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'T^+X})^+\boldsymbol{X'T^+}+\boldsymbol{TZ}(\boldsymbol{Z'TZ})^+\boldsymbol{Z'}]\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T},$$

经化简可得所要结论.

引理 3[11]　设 $A,B\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，则下列条件等价：

1) $\boldsymbol{y}'A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}'B\boldsymbol{y}$ 对任意 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$ 成立；

2) $A=B$.

3　$k\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2(\boldsymbol{T})$ 的稳健性

在模型(1)下，设 $\Phi(\boldsymbol{e})\in\wp(\mu,V)$，利用 $R(\boldsymbol{X}\vdots V)=R(\Sigma)\subset R(\boldsymbol{T})$ 及引理 1，有

$$TT^{+}(y-\mu)=\Sigma\Sigma^{+}(y-\mu)=y-\mu.$$

于是,由引理2可得

$$\hat{\sigma}^{2}(\mu,\Sigma)=(y-\mu)'[\Sigma^{+}-\Sigma^{+}X(X'\Sigma^{+}X)^{+}X'\Sigma^{+}](y-\mu)=$$
$$(y-\mu)'Z(Z'VZ)^{+}Z'(y-\mu),$$
$$\hat{\sigma}^{2}T=y'[T^{+}-T^{+}X(X'T^{+}X)^{+}X'T^{+}]y=y'Z(Z'TZ)^{+}Z'y.$$

定理1 在模型(1)下,设 $\Phi(e)\in\wp(\mu,V)$,则下列条件等价.

ⅰ) $k\hat{\sigma}^{2}(T)$为 σ^{2} 的 MINQUE.

ⅱ) $kf_{v}(Z'TZ)^{+}$为 $Z'VZ$ 的广义逆,且 $Z'\mu=0$.

ⅲ) $kf_{v}(Z'TZ)^{+}Z'VZ$ 为幂等阵,且 $Z'\mu=0$.

证明 条件ⅰ)⇔条件ⅱ). $k\hat{\sigma}^{2}(T)$为 σ^{2} 的 MINQUE,即有 $\hat{\sigma}^{2}(\mu,\Sigma)/f_{v}=k\hat{\sigma}^{2}(T)$,也就是

$$kf_{v}y'Z(Z'TZ)^{+}Z'y=(y-\mu)'Z(Z'VZ)^{+}Z'(y-\mu),$$

上式成立,等价于

$$kf_{v}y'Z(Z'TZ)^{+}Z'y=y'Z(Z'VZ)^{+}Z'y,\tag{5}$$

且

$$Z(Z'VZ)^{+}Z'\mu=0.\tag{6}$$

式(6)成立,当且仅当

$$Z'\mu=0.\tag{7}$$

又式(5)成立,当且仅当

$$kf_{v}VZ(Z'TZ)^{+}Z'V=VZ(Z'VZ)^{+}Z'V,$$

等价于

$$kf_{v}Z'VZ(Z'TZ)^{+}Z'VZ=Z'VZ,$$

即 $kf_{v}(Z'TZ)^{+}$为 $Z'VZ$ 的广义逆.

条件ⅱ)⇔条件ⅲ). $kf_{v}(Z'TZ)^{+}$为 $Z'VZ$ 的广义逆.即有

$$kf_{v}Z'VZ(Z'TZ)^{+}Z'VZ=Z'VZ,\tag{8}$$

上式两边同时左乘 $kf_{v}(Z'TZ)^{+}$,得

$$k^{2}f_{v}^{2}(Z'TZ)^{+}Z'VZ(Z'TZ)^{+}Z'VZ=kf_{v}(Z'TZ)^{+}Z'VZ,\tag{9}$$

即 $kf_{v}(Z'TZ)^{+}Z'VZ$ 为幂等阵.式(9)两边同时左乘$(Z'TZ)$,利用 $R(Z'VZ)\subset R(Z'TZ)$,即得(8)式,从而式(8)与式(9)等价.证毕.

文献[9]讨论了当 $T=I$,$kf_{v}=1$,且 $\mu=0$ 时的特殊情形.显然,文中定理1是文献[9]定理1的进一步推广,并且结论更为简洁.

定理2 在线性模型(1)下,对给定的 $T\in S_{\geqslant}^{n}$,令

$$\wp_{0}(k,T)=\bigcup\{\wp(\mu,V)\mid\mu\in R(X),kf_{v}V=X\Lambda X'+TZD'X'+XDZ'T+TZ\Delta Z'T\},$$

则$\wp_{0}(k,T)$是使得 $k\hat{\sigma}^{2}(T)$为 σ^{2} 的 MINQUE 的误差项 e 的最大分布类.其中 $\Lambda\in S_{\geqslant}^{p}$,$\Delta\in S_{\geqslant}^{n-r}$,满足 $Z'TZ\Delta Z'TZ\Delta=Z'TZ\Delta$,且使 $V\in S_{\geqslant}^{n}$.

证明 一方面,如果 $\Phi(e)\in\wp_{0}(k,T)$,则容易验证定理1的条件ⅱ)成立,故此时 $k\hat{\sigma}^{2}(T)$均为 σ^{2} 的 MINQUE.

另一方面,设 $\Phi(e)\in\wp(\mu,V)$,且 $k\hat{\sigma}^{2}(T)$为 σ^{2} 的 MINQUE.因 $V\in S_{\geqslant}^{n}$,则存在 n 阶矩阵 F,使得 $kf_{v}V=FF'$.不妨设 $F=XU+TZH$,其中 U 为 $p\times n$ 矩阵,H 为$(n-r)\times n$ 矩阵,则有

$$kf_{v}V=X\Lambda X'+TZD'X'+XDZ'T+TZ\Delta Z'T.\tag{10}$$

其中:$\Lambda=UU'\in S_{\geqslant}^{p}$,$D=UH'$,$\Delta=HH'\in S_{\geqslant}^{n-r}$.由定理1的条件ⅱ),有

$$kf_{v}Z'VZ(Z'TZ)^{+}Z'VZ=Z'VZ,$$

将式(10)代入上式,可得

$$Z'TZ\Delta Z'TZ\Delta Z'TZ=Z'TZ\Delta Z'TZ,\tag{11}$$

因 $\Delta=HH'\in S_{\geqslant}^{n-r}$,故式(11)等价于

$$Z'TZ\Delta Z'TZ\Delta=Z'TZ\Delta.$$

又因为 $\boldsymbol{Z}'\mu=0$ 等价于 $\mu\in R(\boldsymbol{X})$. 由定理 1 即得所要结论 . 证毕.

定理 2 中，若给定的 $\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{S}_{>}^{n}$，则此时 $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}$ 可逆，从而 $\Delta=(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z})^{-1}$. 于是，可以得到下面的推论.

推论 1　在线性模型(1)下，给定 $\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{S}_{>}^{n}$，令

$$\aleph_1(k,\boldsymbol{T})=\bigcup\{\aleph(\mu,V)\mid\mu\in R(\boldsymbol{X}),kf_vV=\boldsymbol{X}\Lambda\boldsymbol{X}'+\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}D'\boldsymbol{X}'+\boldsymbol{X}D\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\},$$

则 $\aleph_1(k,\boldsymbol{T})$ 是使得 $k\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{T})$ 为 σ^2 的 MINQUE 的误差项 $\boldsymbol{e}$ 的最大分布类. 其中 $\Lambda\in\boldsymbol{S}_{\geqslant}^{p}$，且使 $V\in\boldsymbol{S}_{>}^{n}$.

4　$k\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2(T)$ 与 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(T)$ 的同时稳健性

考虑 σ^2 的 MINQUE 及 $\boldsymbol{X\beta}$ 的 BLUE 的同时稳健性.

在线性模型(1)下，设 $\Phi(\boldsymbol{e})\in\aleph(\mu,V)$，若 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{T})$ 为 $\boldsymbol{X\beta}$ 的 BLUE，即有

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}^{+}\boldsymbol{X})^{+}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}^{+}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\Sigma^{+}\boldsymbol{X})^{+}\boldsymbol{X}'\Sigma^{+}(\boldsymbol{y}-\mu),$$

显然，上式成立，必有 $\boldsymbol{X}'\Sigma^{+}\mu=0$，等价于 $\mu\in R(V\boldsymbol{Z})$. 此时若 $k\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{T})$ 也为 σ^2 的 MINQUE，则由定理 2，有 $\mu\in R(\boldsymbol{X})$.

又由引理 2 的证明过程知，$R(\boldsymbol{X})\cap R(V\boldsymbol{Z})=\{0\}$. 于是得到了下面的定理.

定理 3　在线性模型(1)下，设 $\Phi(\boldsymbol{e})\in\aleph(\mu,V)$，对于给定的 $\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{S}_{\geqslant}$，若 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{T})$ 为 $\boldsymbol{X\beta}$ 的 BLUE，且 $k\hat{\sigma}^2(T)$ 为 σ^2 的 MINQUE，则必有 $\mu=0$.

定理 4　在线性模型(1)下，对给定的 $\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{S}_{\geqslant}^{n}$，令

$$\aleph_2(\boldsymbol{k},\boldsymbol{T})=\bigcup\{\aleph(0,V)\mid kf_vV=\boldsymbol{X}\Lambda\boldsymbol{X}'+\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}\Delta\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{S}^{n}\},$$

则 $\aleph_2(\boldsymbol{T})$ 是使得 $k\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{T})$ 为 σ^2 的 MINQUE，同时 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{T})$ 为 $\boldsymbol{X\beta}$ 的 BLUE 的误差项 $\boldsymbol{e}$ 的最大分布类. 其中 $\Lambda\in\boldsymbol{S}_{\geqslant}^{p}$，$\Delta\in\boldsymbol{S}_{\geqslant}^{n-r}$，满足 $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}\Delta\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}\Delta=\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}\Delta$.

证明　一方面，设 $kf_vV=\boldsymbol{X}\Lambda\boldsymbol{X}'+\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}\Delta\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}$，则由定理 2 知，$k\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{T})$ 为 σ^2 的 MINQUE. 又因为

$$kf_v\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}^{+}V\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}^{+}[\boldsymbol{X}\Lambda\boldsymbol{X}'+\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}\Delta\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}]\boldsymbol{Z}=0,$$

从而由式(3)，此时 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{T})$ 也为 $\boldsymbol{X\beta}$ 的 BLUE.

另一方面，在模型(1)下，设 $\Phi(\boldsymbol{e})\in\aleph(\mu,V)$，若 $\hat{\sigma}^2(k,\boldsymbol{T})$ 为 σ^2 的 MINQUE，同时 $\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{T})$ 也为 $\boldsymbol{X\beta}$ 的 BLUE. 则由定理 3 知，$\mu=0$. 又由定理 2 及式(3) 知，V 可表示为

$$kf_vV=\boldsymbol{X}\Lambda\boldsymbol{X}'+\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}D'\boldsymbol{X}'+\boldsymbol{X}D\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}\Delta\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T},\tag{12}$$

并且满足

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}^{+}V\boldsymbol{Z}=0,\tag{13}$$

将式(12)代入式(13)，得

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}^{+}\boldsymbol{X}D\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}=0,$$

这等价于

$$\boldsymbol{X}D\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}=0.$$

从而

$$V=\boldsymbol{X}\Lambda\boldsymbol{X}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}\Delta\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}.$$

定理得证.

推论 2　在线性模型(1)下，对给定的 $\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{S}_{\geqslant}^{n}$，令

$$\aleph_3(\boldsymbol{k},\boldsymbol{T})=\bigcup\{\aleph(0,V)\mid kf_vV=\boldsymbol{X}\Lambda\boldsymbol{X}'+\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{T}\},$$

则 $\aleph_3(\boldsymbol{T})$ 是使得 $k\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{T})$ 为 σ^2 的 MINQUE，同时，$\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{T})$ 也为 $\boldsymbol{X\beta}$ 的 BLUE 的误差项 $\boldsymbol{e}$ 的最大分布类. 其中 $\Lambda\in\boldsymbol{S}_{\geqslant}^{p}$ 且使 $V\in\boldsymbol{S}_{\geqslant}^{n}$.

从结论不难看出，当给定的矩阵 $\boldsymbol{T}=I$，且 $\mu=0$ 时，即可推出文献[11]中的主要结论.

参考文献：

[1]　RAO C R. Linear statistical inference and its applications[M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1973.

[2]　王松桂. 线性模型的理论及其应用[M]. 合肥：安徽教育出版社，1987.

[3]　BAKSALARY J K, KALA R. On equalities between BLUEs, WLSE, and SLSEs[J]. Canad J Statist, 1983, 11(2):

119-123.

[4] PUNTANEN S. Some matrix results related to a partitioned singular linear model[J]. Comm Statist: Theory Methods,1996,25(2):269-279.

[5] PUNTANEN S. Some further results related to reduced singular linear models[J]. Comm Statist: Theory Methods, 1997,26(2):375-385.

[6] WERNER H J,YAPAR C. A BLUE decomposition in the general linear regression model[J]. Linear Algebra Appl, 1996,237/238:395-404.

[7] PUNTANEN S,STYAN G P H. The equality of the ordinary leas squares estimator and the best linear unbiased estimator[J]. Amer Statist,1989,43(3):153-161.

[8] TIAN Yong-ge,WIENSB D P. On equality and proportionality of ordinary least squares,weighted least squares and best linear unbiased estimators in the general linear model[J]. Statistics & Probability letters,2006,76(12):1265-1272.

[9] GROB J. A note on equality of MINQUE and simple estimator in the general Gauss-Markov model[J]. Statistics & Probability letters,1997,35(4):335-339.

[10] ZHANG Bao-xue,LUO Ji,LI Xin. Robustness of minimum norm of variance under the quadratic unbiased estimator general linear model[J]. Journal of Beijing Institute of Technology,2002,11(1):97-100.

[11] LI Shu-you,Zhang Bao-xue. Robustness of mnimum norm quadratic unbiased estimator of variance for the general linear model[J]. Journal of Mathematical Research & Exposition,2004,23(2):280-284.

[12] 倪国熙. 常用的矩阵理论和方法[M]. 上海:上海科学技术出版社,1984:74-75.

Robustness of Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimator of Variance in Terms of Error Distributions under the Singular Linear Model

QIU Hong-bing[1], LUO Ji[2], SU Xu[3]

(1. Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018, China;
3. School of Statistics, Dongbei University of Finance and Economics, Dalian 116025, China)

Abstract: Robustness of the minimum norm quadratic unbiased estimator of variance in terms of error distributions is discussed in singular linear model. We explore the maximal distribution class of error term, where the minimum norm quadratic unbiased estimator of variance σ^2 holds its optimality. Furthermore considering robustness of the best linear unbiased estimator of estimable function $\boldsymbol{X\beta}$, we obtain the maximal distribution class of error term, where the minimum norm quadratic unbiased estimator of variance σ^2 and the best linear unbiased estimator of $\boldsymbol{X\beta}$ keep optimality simultaneously.

Keywords: singular linear model; robust; best linear unbiased estimator; minimum norm quadratic unbiased estimator

(**责任编辑**: 黄晓楠 **英文审校**: 张金顺,黄心中)