文章编号：1000-5013(2012)01-0107-05

非平凡双向单叶调和映照的微分方程

胡春英，黄心中

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要： 给出定义在单连通区域上的保向单叶调和映照 $f=h+\overline{g}$ 是非平凡双向单叶调和映照的充要条件，即 $f(z)$ 为非平凡双向单叶调和映照的充要条件是 $g'(z)\neq 0, z\in D$，且满足 $h(z)$，$g(z)$ 的两个微分方程．此外，应用相关结果得到单位圆上的非平凡双向单叶调和映照的系数和面积偏差.

关键词： 单叶调和函数；微分方程；双向单叶调和函数；系数估计；面积偏差

中图分类号： O 174.51　　**文献标志码：** A

一个复值函数 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 在平面区域 $D\subset C$ 上调和是指 $u(z)$，$v(z)$ 在区域 D 上实调和. 如果 D 是一个单连通区域，则 f 可写为 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，其中 h，g 为 D 上的解析函数. Lewy[1] 给出了 f 局部单叶且保向的充要条件：$J_f=|h'|^2-|g'|^2>0, z\in D$. Duren[2]，Pavlovic等[3-4]，陈怀惠等[5] 和黄心中[6] 分别研究了单位圆和上半平面上的单叶调和函数为拟共形映照的条件并取得一些重要的成果. Hengartner 等[7] 提出单叶调和映照的反函数很少是调和的. Clunie 等[8] 给出函数 $l_0(z)=\mathrm{Re}(\frac{z}{1-z})+\mathrm{iIm}\,\frac{z}{(1-z)^2}$ 在单位圆上是单叶调和的，林兴端[9] 则证明了该函数的反函数不是调和的. 张兆功等[10] 给出单连通区域 D 上的保向单叶调和映照 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是双向单叶调和映照的充要条件，即 $h(z)$，$g(z)$ 满足微分方程

$$h'(z)g'(z)\,\overline{h''(z)}+\overline{h'(z)g'(z)}g''(z)=0,\qquad z\in D.\tag{1}$$

基于此，本文给出关于函数 $h(z)$ 和 $g(z)$ 的两个微分方程是 $f(z)$ 为非平凡双向单叶调和映照的充要条件，并应用此结果得到单位圆上非平凡双向单叶调和映照的一些系数和面积偏差的精确估计.

1　预备知识

定义 1　设 f 是保向单叶调和映照，如果其反函数也是调和映照，则称 f 是双向单叶调和映照.

定理A　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是一个单连通区域 D 上的保向单叶调和映照，则其反函数 $z=f^{-1}(w)$ 在 $G=f(D)$ 内调和当且仅当下列 3 种情形之一成立：

ⅰ) $f(z)$ 在 D 内共形，即 $g(z)\equiv\mathrm{const}$；

ⅱ) $f(z)$ 是仿射变换，即 $f(z)=\alpha z+\beta\overline{z}+B$，$|\alpha|>|\beta|>0$；

ⅲ) $f(z)$ 具有的形式为

$$f(z)=A[\alpha z+\beta+\log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta})-\overline{\log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta})}]+\mathrm{const}.\tag{2}$$

式(2)中：A，α，β 是常数且满足条件 $A\neq 0$，$\alpha\neq 0$，$\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>0$，$z\in D$.

定义 2　若 f 是除共形映照和仿射变换外的双向单叶调和映照，称 f 是非平凡双向单叶调和映照.

定理 B[11]　设 f 是定义在椭圆 $U=\{z=x+\mathrm{i}y\,\Big|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\}$ 上的保向单叶调和映照，具有式(2)的

收稿日期： 2011-12-02

通信作者： 胡春英(1979-)，女，讲师，主要从事函数论的研究. E-mail：huchunying_79@sina.com.

基金项目： 福建省自然科学基金资助项目(2008J0195)；华侨大学科研基金资助项目(11HZR17)

形式,其中 $A\neq 0,\alpha=\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2\neq 0$,则 f 的反函数为调和映照的充要条件是 $\mathrm{Re}\,\beta\geqslant\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}$.

2 主要结果和证明

定理1 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是一个单连通区域 D 上的保向单叶调和映照,则 $f(z)$ 为非平凡双向单叶调和映照的充要条件是 $g'(z)\neq 0,z\in D$,且 $h(z)$, $g(z)$ 满足微分方程:

$$\left.\begin{aligned} h''-\alpha h' &= -\frac{1}{A}(h')^2,\\ h'(z_0) &= \frac{A\alpha}{1-K\mathrm{e}^{-\alpha z_0}},\quad z_0\in D.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} g''+\alpha g' &= \frac{1}{\overline{A}}(g')^2,\\ g'(z_0) &= -\frac{\overline{A}\alpha K}{\mathrm{e}^{\alpha z_0}-K},\quad z_0\in D.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式(3),(4)中:A, α, K 是非零常数,且 $|K|<|\mathrm{e}^{\alpha z}|,z\in D$.

1) 充分性证明. 首先求微分方程(3)的解.

令 $\varphi=h'$,则微分方程(3)变为 Bernoulli 方程的初值问题,即

$$\varphi'-\alpha\varphi=-\frac{1}{A}\varphi^2,\qquad \varphi(z_0)=\frac{A\alpha}{1-K\mathrm{e}^{-\alpha z_0}}.$$

由 f 保向可知,$h'(z)\neq 0,z\neq D$. 再令 $u=1/\varphi$,可得

$$u'+\alpha u=\frac{1}{A},\qquad u(z_0)=\frac{1-K\mathrm{e}^{-\alpha z_0}}{A\alpha}.$$

上述一阶非齐次线性微分方程的通解为 $u=c_1\mathrm{e}^{-\alpha z}+\dfrac{1}{A\alpha}$,$c_1$ 为任意常数. 由初始条件 $u(z_0)=\dfrac{1-K\mathrm{e}^{-\alpha z_0}}{A\alpha}$,可得 $c_1=-\dfrac{K}{A\alpha}$. 因此有 $u=\dfrac{1}{A\alpha}(1-K\mathrm{e}^{-\alpha z})$,从而有 $\varphi=\dfrac{A\alpha}{1-K\mathrm{e}^{-\alpha z}}$,即有

$$h=\int\varphi\,\mathrm{d}z=A\log(\mathrm{e}^{\alpha z}-K)+\mathrm{const}=A[\alpha z+\log(1-K\mathrm{e}^{-\alpha z})]+\mathrm{const}.\tag{5}$$

其次,求微分方程(4)的解.

令 $\Psi=g'$,则微分方程(4)变为 Bernoulli 方程的初值问题,即

$$\Psi'+\alpha\Psi=\frac{1}{\overline{A}}\Psi^2,\qquad \Psi(z_0)=-\frac{\overline{A}\alpha K}{\mathrm{e}^{\alpha z_0}-K}.$$

由已知 $g'(z)\neq 0,z\in D$,再令 $t=1/\Psi$,可得

$$t'-\alpha t=-\frac{1}{\overline{A}},\qquad t(z_0)=-\frac{\mathrm{e}^{\alpha z_0}-K}{\overline{A}\alpha K}.$$

上述一阶非齐次线性微分方程的通解为 $t=c_2\mathrm{e}^{\alpha z}+\dfrac{1}{\overline{A}\alpha}$, c_2 为任意常数. 由初始条件 $t(z_0)=-\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha z_0}-K}{\overline{A}\alpha K}$,可得 $c_2=-\dfrac{1}{\overline{A}\alpha K}$. 因此有 $t=\dfrac{1}{\overline{A}\alpha}(1-\dfrac{1}{K}\mathrm{e}^{\alpha z})$,从而有 $\Psi=-\dfrac{\overline{A}\alpha K\mathrm{e}^{-\alpha z}}{1-K\mathrm{e}^{-\alpha z}}$,即有

$$g=\int\Psi\,\mathrm{d}z=-\int\frac{\overline{A}\alpha K\mathrm{e}^{-\alpha z}}{1-K\mathrm{e}^{-\alpha z}}\mathrm{d}z=-\overline{A}\log(1-K\mathrm{e}^{-\alpha z})+\mathrm{const}.\tag{6}$$

结合式(5),(6),可得

$$f(z)=h+\overline{g}=A[\alpha z+\log(1-K\mathrm{e}^{-\alpha z})-\overline{\log(1-K\mathrm{e}^{-\alpha z})}]+\mathrm{const}.\tag{7}$$

取 $K=\mathrm{e}^{-\beta}$,则式(7)可写为

$$f(z)=A[\alpha z+\beta+\log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta})-\overline{\log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta})}]+\mathrm{const}.\tag{8}$$

由已知 $|K|<|\mathrm{e}^{\alpha z}|,z\in D$,可得

$$|K\mathrm{e}^{-\alpha z}|=|\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta}|=\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)}<1,\qquad z\in D.\tag{9}$$

即 $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>0$, $z\in D$.

根据定理A,可知 $f(z)$ 是单连通区域 D 上的非平凡双向单叶调和映照.

2）必要性证明．因为 f 是单连通区域 D 上的非平凡双向单叶调和映照，由定理 A 可知 f 具有式(2)的形式，其中 A，α，β 是常数且满足条件 $A\neq0$，$\alpha\neq0$，$\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>0$，$z\in D$. 令 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，则有

$$\left.\begin{aligned} h(z) &= A[\alpha z+\beta+\log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta})]+\mathrm{const},\\ g(z) &= -\overline{A}\ \log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta}). \end{aligned}\right\}\tag{10}$$

通过计算可得 $h'=\dfrac{A\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta}}$，$h''=-\dfrac{A\alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta}}{(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta})^2}$，$g'=-\dfrac{\overline{A}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta}}$，$g''=\dfrac{\overline{A}\alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta}}{(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta})^2}$.

经整理可得 $h''-\alpha h'=-\dfrac{1}{A}(h')^2$，$g'(z)\neq0$，$z\in D$，以及 $g''+\alpha g'=\dfrac{1}{\overline{A}}(g')^2$. 令 $\mathrm{e}^{-\beta}=K$，则有

$$\left.\begin{aligned} h'(z_0) &= \frac{A\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\alpha z_0-\beta}}=\frac{A\alpha}{1-K\mathrm{e}^{-\alpha z_0}}, \qquad z_0\in D,\\ g'(z_0) &= -\frac{\overline{A}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha z_0-\beta}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha z_0-\beta}}=-\frac{\overline{A}\alpha K}{\mathrm{e}^{\alpha z_0}-K}, \qquad z_0\in D. \end{aligned}\right\}$$

又因为 $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>0$，$z\in D$，所以有

$$|K\mathrm{e}^{-\alpha z}|=|\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta}|=\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)}<1, \qquad z\in D,$$

即 $|K|<|\mathrm{e}^{\alpha z}|$，$z\in D$. 因此，$h(z)$ 和 $g(z)$ 分别满足微分方程(3)，(4).

3　应用

由定理 B，容易得到如下的引理．

引理 1　设 f 是定义在单位圆 $U=\{z\,|\,|z|<1\}$ 上的保向单叶调和映照，则 f 为非平凡双向单叶调和映照的充要条件是 f 具有式(2)的形式，其中 $A\neq0$，$\alpha\neq0$，$\mathrm{Re}\ \beta\geqslant|\alpha|$.

定理 2　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是定义在单位圆 $U=\{z\,|\,|z|<1\}$ 上的非平凡双向单叶调和映照，其中 $h(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n$，则有

$$\left.\begin{aligned} &|a_1|\leqslant\frac{|A||\alpha|}{1-\mathrm{e}^{-|\alpha|}}, \qquad |b_1|\leqslant\frac{|A||\alpha|}{\mathrm{e}^{|\alpha|}-1},\\ &|a_n|=|b_n|\leqslant\frac{|A||\alpha|^n}{n!}\sum_{m=1}^{\infty}m^{n-1}\mathrm{e}^{-m|\alpha|}, \qquad n\geqslant2. \end{aligned}\right\}\tag{11}$$

其中：A，α 是非零常数，估计是精确的.

证明　f 是定义在单位圆 $U=\{z\,|\,|z|<1\}$ 上的非平凡双向单叶调和映照，由定理 A 可知，$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$. 其中 $h(z)=A[\alpha z+\beta+\log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta})]+\mathrm{const}$，$g(z)=-\overline{A}\ \log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta})$，$A\neq0$，$\alpha\neq0$.

显然有 $a_n=\dfrac{h^{(n)}(0)}{n!}$，$b_n=\dfrac{g^{(n)}(0)}{n!}$，$h'(z)=\dfrac{A\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\alpha z-\beta}}$，以及有

$$\left.\begin{aligned} h^{(n)}(z) &= (-1)^{n-1}A\alpha^n\sum_{m=1}^{\infty}m^{n-1}\mathrm{e}^{-m(\alpha z+\beta)}, \qquad n\geqslant2,\\ g^{(n)}(z) &= (-1)^n\overline{A}\alpha^n\sum_{m=1}^{\infty}m^{n-1}\mathrm{e}^{-m(\alpha z+\beta)}, \qquad n\geqslant1. \end{aligned}\right\}$$

所以可得

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= h'(0)=\frac{A\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\beta}},\\ a_n &= \frac{h^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}A\alpha^n\sum_{m=1}^{\infty}m^{n-1}\mathrm{e}^{-m\beta}, \qquad n\geqslant2,\\ b_n &= \frac{g^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^n}{n!}\overline{A}\alpha^n\sum_{m=1}^{\infty}m^{n-1}\mathrm{e}^{-m\beta}, \qquad n\geqslant1. \end{aligned}\right\}\tag{12}$$

由式(12)可以得到 $|a_n|=|b_n|$，$n\geqslant2$. 再由引理 1 可以得到

$$|a_1|\leqslant\frac{|A||\alpha|}{1-\mathrm{e}^{-|\alpha|}}, \qquad |b_1|\leqslant\frac{|A||\alpha|}{\mathrm{e}^{|\alpha|}-1},$$

$$|a_n|=|b_n|\leqslant\frac{|A||\alpha|^n}{n!}\sum_{m=1}^{\infty}m^{n-1}\mathrm{e}^{-m|\alpha|},\qquad n\geqslant 2.$$

容易看出

$$f(z)=A[\alpha z+|\alpha|+\log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-|\alpha|})-\overline{\log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-|\alpha|})}]+\mathrm{const}. \tag{13}$$

是极值函数.式(13)中:$A\neq 0$;$\alpha\neq 0$

推论 1 设函数 f 满足定理 2 的条件,则有$|a_1|<(|\alpha|+1)|A|$,$|b_1|<|A|$,$|a_2|=|b_2|<|A|/2$,$|a_3|=|b_3|<|A|/3$.

证明 由式(11)可知,$|b_1|\leqslant\frac{|A||\alpha|}{\mathrm{e}^{|\alpha|}-1}$.因为当$|\alpha|>0$ 时,函数$\frac{|\alpha|}{\mathrm{e}^{|\alpha|}-1}$关于$|\alpha|$是单调递减的,且有$\lim\limits_{|\alpha|\to 0}\frac{|\alpha|}{\mathrm{e}^{|\alpha|}-1}=1$,所以有$\frac{|\alpha|}{\mathrm{e}^{|\alpha|}-1}<1$,即$|b_1|<|A|$.再由式(11)可得

$$|a_1|\leqslant\frac{|A||\alpha|}{1-\mathrm{e}^{-|\alpha|}}=\frac{|A||\alpha|\mathrm{e}^{|\alpha|}}{\mathrm{e}^{|\alpha|}-1}<(|\alpha|+1)|A|.$$

$$|a_2|=|b_2|\leqslant\frac{|A||\alpha|^2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}m\mathrm{e}^{-m|\alpha|}=\frac{|A||\alpha|^2\mathrm{e}^{-|\alpha|}}{2(1-\mathrm{e}^{-|\alpha|})^2}.$$

因为当$|\alpha|>0$ 时,函数$\frac{|\alpha|^2\mathrm{e}^{-|\alpha|}}{(1-\mathrm{e}^{-|\alpha|})^2}$关于$|\alpha|$是单调递减的,并且$\lim\limits_{|\alpha|\to 0}\frac{|\alpha|^2\mathrm{e}^{-|\alpha|}}{(1-\mathrm{e}^{-|\alpha|})^2}=1$,所以有$\frac{|\alpha|^2\mathrm{e}^{-|\alpha|}}{(1-\mathrm{e}^{-|\alpha|})^2}<1$,即$|a_2|=|b_2|<|A|/2$.同样由式(11)得

$$|a_3|=|b_3|\leqslant\frac{|A||\alpha|^3}{3!}\sum_{m=1}^{\infty}m^2\mathrm{e}^{-m|\alpha|}=\frac{|A||\alpha|^3(\mathrm{e}^{-|\alpha|}+\mathrm{e}^{-2|\alpha|})}{3!(1-\mathrm{e}^{-|\alpha|})^3}.$$

因为当$|\alpha|>0$ 时,可证得函数$\frac{|\alpha|^3(\mathrm{e}^{-|\alpha|}+\mathrm{e}^{-2|\alpha|})}{(1-\mathrm{e}^{-|\alpha|})^3}$关于$|\alpha|$是单调递减的,并且

$$\lim_{|\alpha|\to 0}\frac{|\alpha|^3(\mathrm{e}^{-|\alpha|}+\mathrm{e}^{-2|\alpha|})}{(1-\mathrm{e}^{-|\alpha|})^3}=2,$$

所以有$\frac{|\alpha|^3(\mathrm{e}^{-|\alpha|}+\mathrm{e}^{-2|\alpha|})}{(1-\mathrm{e}^{-|\alpha|})^3}<2$,即$|a_3|=|b_3|<|A|/3$.

猜想 1 当 f 满足定理 2 的条件时,有$|a_n|<|A|/n$,$n\geqslant 2$;$|b_n|<|A|/n$,$n\geqslant 1$.

定理 3 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$ 是定义在单位圆$U=\{z||z|<1\}$上的非平凡双向单叶调和映照,则 $f(U)$的面积 $S(f(U))$满足下列不等式:

$$\frac{\pi|A|^2|\alpha|^2(\mathrm{e}^{|\alpha|}-1)}{\mathrm{e}^{|\alpha|}+1}\leqslant S(f(U))\leqslant\frac{\pi|A|^2|\alpha|^2(\mathrm{e}^{|\alpha|}+1)}{\mathrm{e}^{|\alpha|}-1}. \tag{14}$$

式(14)中:A,α 是非零常数,估计是精确的.

证明 因为 $f(z)$是定义在单位圆上的非平凡双向单叶调和映照,由定理 2 的证明有

$$a_1=\frac{A\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\beta}},\qquad b_1=-\frac{\overline{A}\alpha\mathrm{e}^{-\beta}}{1-\mathrm{e}^{-\beta}},\qquad |a_n|=|b_n|,\qquad n\geqslant 2. \tag{15}$$

由式(15)可得$|b_1|=|a_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,\beta}$,所以有

$$S(f(U))=\iint_U(|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\pi|a_1|^2(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{Re}\,\beta})=\pi\frac{|A|^2|\alpha|^2}{|1-\mathrm{e}^{-\beta}|^2}(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{Re}\,\beta})$$

根据引理 1,一方面有

$$\pi\frac{|A|^2|\alpha|^2}{|1-\mathrm{e}^{-\beta}|^2}(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{Re}\,\beta})\leqslant\pi\frac{|A|^2|\alpha|^2(\mathrm{e}^{|\alpha|}+1)}{\mathrm{e}^{|\alpha|}-1};$$

另一方面有

$$\pi\frac{|A|^2|\alpha|^2}{|1-\mathrm{e}^{-\beta}|^2}(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{Re}\,\beta})\geqslant\pi\frac{|A|^2|\alpha|^2(\mathrm{e}^{|\alpha|}-1)}{\mathrm{e}^{|\alpha|}+1}.$$

因此有

$$\frac{\pi\,|A|^2\,|\alpha|^2(\mathrm{e}^{|\alpha|}-1)}{\mathrm{e}^{|\alpha|}+1}\leqslant S(f(U))\leqslant\frac{\pi\,|A|^2\,|\alpha|^2(\mathrm{e}^{|\alpha|}+1)}{\mathrm{e}^{|\alpha|}-1}.$$

当 $f(z)$ 取式(13)的形式时，式(14)的右边等式成立；而当 $f(z)=A[\alpha z+|\alpha|+\mathrm{i}\pi+\log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-(|\alpha|+\mathrm{i}\pi)})-\overline{\log(1-\mathrm{e}^{-\alpha z-(|\alpha|+\mathrm{i}\pi)})}]+\mathrm{const}$ 时，其中 $A\neq 0$，$\alpha\neq 0$，则式(14)的左边等式成立，说明估计是精确的.

参考文献：

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Amer Math Soc，1936，42(10)：689-692.

[2] DUREN P. Harmonic mappings in the plane[M]. New York：Cambridge University Press，2004.

[3] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk[J]. Ann Acad Sci Fenn Math，2002，27：365-372.

[4] KALAJ D，PAVLOVIC M. Boundary correspondence under quasiconformal harmonic diffeomorphisms of a half-plane[J]. Ann Acad Sci Fenn Math，2005，30：159-165.

[5] CHEN Huai-hui，GAUTHIER P M，HENGARTNER W. Bloch constants for planar harmonic mappings[J]. Proc Amer Math Soc，2000，128(11)：3231-3240.

[6] 黄心中. 单位圆盘上的调和拟共形同胚[J]. 数学年刊：A 辑，2008，29(4)：519-524.

[7] HENGARTNER W，SCHOBER G. Harmonic mappings with given dilatation[J]. J London Math Soc，1986，33(2)：473-483.

[8] CLUNIE J，SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser AI Math，1984，9：3-25.

[9] 林兴端. 调和单叶映射反函数调和的充要条件[J]. 纯粹数学与应用数学，1995，11(2)：105-109.

[10] ZHANG Zhao-gong，LIU Li-quan. The inverse functions of univalent harmonic mappings[J]. Advances in Mathematics，1996，25(3)：270-276.

[11] 胡春英，黄心中. 单叶调和函数及其反函数为调和拟共形的充要条件[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2010，31(5)：586-589.

On Differential Equations for Non-Trivial Bilateral Univalent Harmonic Mappings

HU Chun-ying，HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract： In this paper，we obtained a necessary and sufficient conditions that a sense preserving and univalent harmonic mapping in a simply connected domain is a non-trivial bilateral univalent harmonic mapping. We also obtain some estimates of coefficients and area distortion bound for non-trivial bilateral univalent harmonic mappings in a unit disk.

Keywords： univalent harmonic mappings，differential equation，bilateral univalent harmonic mappings，coefficient estimate，area distortion

(**责任编辑**：陈志贤　　**英文审校**：张金顺)