

文章编号: 1000-5013(2012)01-0103-04

调和映照的 Bloch 常数

李东征, 陈行堤

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 由精确化的 Schwarz 引理, 研究开调和映照类和 K -拟正则调和映照类的 Bloch 常数, 改进陈怀惠和 P. M. Gauthier 的相应结果. 分别得到开调和映照类用全纯函数的 Bloch 常数表示的渐进精确的偏差估计, 以及 K -拟正则调和映照类的用系数 $|b_1|$ 表示的偏差估计.

关键词: 拟正则调和映照; 开调和映照; Bloch 常数; Schwarz 引理

中图分类号: O 174.55

文献标志码: A

1 预备知识

研究映照类的 Bloch 常数和 Landau 常数是复分析理论中的一个重要的研究问题. Bloch^[1]研究了满足 $f'(0)=1$ 单位圆盘上的全纯函数类的 Bloch 常数; Ahlfors^[2]利用超双曲度量得到下界 $\sqrt{3}/4$, 并猜测 $\sqrt{3}/4$ 是最佳的. 此结果保持了半个世纪之久, 直到 1990 年, Bonk^[3]巧妙地构造了一对全纯函数, 证明此猜测是错误的. 文献[4]给出了 $\sqrt{3}/4 + 2 \times 10^{-4}$ 的下界估计, 但这个问题至今仍未得到解决. 近期, 人们将问题推广到调和映照类的情形^[5-12]. 文献[12]利用全纯函数类的 Bloch 常数来表示调和映照的 Bloch 常数, 证明了 $B_{\text{har}}^K \geq \frac{2}{K+1} B_{\text{hol}}$ 和 $B_{\text{har}}^O \geq \frac{1}{4} B_{\text{hol}}$.

假设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 为单位圆盘 D 上的非常数调和映照, 其中 $h(z)$ 与 $g(z)$ 为 D 上的全纯函数. $f(D)$ 包含的所有单叶圆盘为 $f(z)$ 在 D 上的一些区域上同胚的象, 所有单叶圆盘半径的上确界称为 $f(D)$ 的内径, 记作 b_f ; $\text{Har}_K(D)$ 为单位圆盘 D 上的全体 K -拟正则调和映照的集合; $\text{Har}_O(D)$ 为单位圆盘 D 上的所有开调和映照的集合; $\text{Har}_m(D) = \{f(z) \mid f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in \text{Har}_O(D), g(z) = b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \dots, m \geq 2\}$; 称 $B_{\text{hol}} = \inf\{b_f : f \text{ 为 } D \text{ 上的全纯函数, 且 } f'(0) = 1\}$ 为单位圆 D 上全纯函数的 Bloch 常数.

定义 K -拟正则调和映照与开调和映照的 Bloch 常数为

$$\begin{aligned} B_{\text{har}}^K &= \inf\{b_f : f \in \text{Har}_K(D), f_z(0) = 1\}, \\ B_{\text{har}}^O &= \inf\{b_f : f \in \text{Har}_O(D), f_z(0) = 1, f_{\bar{z}}(0) = 0\}, \\ B_{\text{har}}^m &= \inf\{b_f : f \in \text{Har}_m(D), f_z(0) = 1\}. \end{aligned}$$

2 引理及其证明

引理 1 设 $f(z) = z + \overline{g(z)}$, 其中 $g(z) = b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \dots, (b_m \neq 0, m \geq 2)$. f 为 $D_r = \{z : |z| \leq r\}$ 上的 K -拟正则调和映照, 则 f 在 D_r 上单叶, 且 $f(D_r)$ 包含一个半径为 R_m 的单叶圆盘. 其中: $R_m = r(1 - \frac{K-1}{m(K+1)})$.

证明 对任意的 $z_1, z_2 \in D_r$ 且 $z_1 \neq z_2$, 有

收稿日期: 2011-02-19

通信作者: 陈行堤(1976-), 男, 副教授, 主要从事函数论的研究. E-mail: chxtt@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(S0650019); 华侨大学基本科研专项基金资助项目(JB-ZR1136)

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \int_{z_1 z_2} f_z dz + f_z d\bar{z} \right| = \left| \int_{z_1 z_2} dz + \bar{g}_z d\bar{z} \right| \geq \\ &= \left| \int_{z_1 z_2} dz \right| - \left| \int_{z_1 z_2} g_z dz \right| \geq |z_1 - z_2| - \int_{z_1 z_2} |g_z| ds. \end{aligned}$$

由于 f 为 D_r 上的 K -拟正则调和映照, 所以有

$$|\mu_f| = \left| \frac{\bar{f}_z}{f_z} \right| = \left| \frac{g_z}{1} \right| \leq k = \frac{K-1}{K+1} < 1,$$

则有

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\geq |z_1 - z_2| - \int_{z_1 z_2} |g_z| ds \geq \\ &= |z_1 - z_2| - \int_{z_1 z_2} k ds = |z_1 - z_2| (1 - k). \end{aligned}$$

显然, $f(z)$ 在 D_r 上单叶.

由于 $|g_z| \leq k, z \in D_r$, 令 $G(z) = \frac{g_z}{z^{m-2}} = mb_m z + (m+1)b_{m+1} z^2 + \cdots$. 由最大模原理可知, $|G(z)| \leq \frac{k}{r^{m-2}}, z \in D_r, G(0) = 0$. 由 Schwartz 引理可知, $|G(z)| \leq \frac{k}{r^{m-1}} |z|, z \in D_r$. 所以有 $|g_z| \leq \frac{k}{r^{m-1}} |z|^{m-1}$. 取 $z_1 = z, z_2 = 0$, 则有

$$\begin{aligned} |f(z) - f(0)| &\geq |z - 0| - \int_{0z} |g_z| ds \geq |z| - \int_{0z} \frac{k}{r^{m-1}} |z|^{m-1} ds = \\ &= |z| - \frac{k}{mr^{m-1}} |z|^m = |z| \left(1 - \frac{k}{mr^{m-1}} |z|^{m-1} \right), \end{aligned}$$

即

$$|f(z)| \geq |z| \left(1 - \frac{k}{mr^{m-1}} |z|^{m-1} \right).$$

令 $z \rightarrow \partial D_r$, 则有

$$|f(z)| \geq r \left(1 - \frac{k}{m} \right) = r \left(1 - \frac{K-1}{m(K+1)} \right).$$

注 1 特别地, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 有 $R_m \rightarrow r$. 因此, 上述结果是渐进精确的. 特别地, 当 $m=2$ 时有 $R_2 \geq \frac{K+3}{2(K+1)}r$.

推论 1 设 $f(z) = z + \overline{g(z)}$, 且 $g(z) = b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \cdots, (b_m \neq 0, m \geq 2)$. f 为 D 上的 K -拟正则调和映照, 则 f 在 D 上单叶, 且 $f(D)$ 包含一个半径为 R'_m 的单叶圆盘, 其中 $R'_m = \frac{(m-1)K+m+1}{m(K+1)} = \frac{m(K+1)-(K-1)}{m(K+1)}$. 特别地, 当 $m=2$ 时有 $R'_2 = \frac{K+3}{2(K+1)}$.

引理 A^[13] 若 $f(z)$ 为 D 到 D 上的全纯函数, 则有 $|f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|}$.

3 主要结果及其证明

由于 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 为 D 上的调和映照, 则 $h(z)$ 为 D 上的全纯函数; $f_z(0) = 1$, 显然 $h_z(0) = 1$, 则对于任意的 $r \leq B_{\text{hol}}$, 存在一个以 ξ_0 为中心, r 为半径的圆盘 D_r 为 h 在单叶区域 $G_0 \subset D$ 上的象. 在这里, 可以认为 $\xi_0 = 0$; 否则, 令 $h_1 = h - \xi_0$. 显然, h_1 也在 G_0 上单叶, 且 $h_1(G_0)$ 包含一个以零点为中心, r 为半径的圆盘. 又因为 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 与 $f_1(z) = h_1(z) + \overline{g(z)}$ 单叶区域显然相同. 因此, 下面证明中可设 $\xi_0 = 0$.

定理 1 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in \text{Har}_m(D)$, 且 $f_z(0) = 1$, 则 $B_{\text{har}}^m \geq B_{\text{hol}}(1 - 1/m)$.

证明 由于开调和映照是一个开变换, 设 $E \in D$ 为离散点集, 所以有 $J_f(z) > 0, z \in D \setminus E$. 即 $|f_z| > |\bar{f}_z|, z \in D \setminus E$. 令 $\mu_f(z) = \bar{f}_z / f_z$, 显然 $\mu_f(z)$ 为全纯函数, 且 $|\mu_f(z)| < 1$, 又有 $\bar{f}_z(0) = 0$, 所以 $\mu_f(0) = 0$. 由 Schwarz 引理可知, $|\mu_f(z)| \leq |z|, z \in D$. 显然, $f(z)$ 在以零点为中心, ρ 为半径的圆盘上为 K -拟

正则调和映照, 其中 $K = \frac{1+\rho}{1-\rho}$, ($0 < \rho < 1$).

令 $F(z) = \frac{1}{\rho} f(\rho z) = \frac{1}{\rho} h(\rho z) + \frac{1}{\rho} \overline{g(\rho z)} = H(z) + \overline{G(z)}$, 其中 $G(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots$, ($c_m = \rho^{m-1} b_m \neq 0, m > 2$). 显然, $F(z)$ 为单位圆盘 D 上的 K -拟正则调和映照. 所以有 $|\frac{F_z}{F_z}| < k = \frac{K-1}{K+1} < 1, z \in D$. 又因 $F_z(0) = 0$, 由 Schwarz 引理可知, $|\frac{F_z}{F_z}| < k |z|^{m-1}$ 且 $F_z(0) = 1$. 显然, $H(z)$ 为 D 上的全纯函数且 $H_z(0) = 1$, 则对任意的 $r \leq B_{\text{hol}}$, 存在一个以零点为中心, r 为半径的圆盘 Δ 为 H 在单叶区域 $G \in D$ 上的象.

令 $P(\xi) = F \circ H^{-1}(\xi) = (H + \bar{G}) \circ H^{-1}(\xi) = \xi + \bar{G} \circ H^{-1}(\xi)$, $P(\xi)$ 为圆盘 Δ 上的 K -拟正则调和映照, 其中 $G \circ H^{-1}(\xi) = d_m \xi^m + d_{m+1} \xi^{m+1} + \dots$, $P_\xi(0) = 1$. 由引理 1 可知, $P(\xi)$ 在 Δ 上单叶, 且 $P(\Delta)$ 包含一个半径为 R_m 的单叶圆盘, 其中 $R_m = r(1 - k/m)$.

由于 $P(\xi) = F \circ H^{-1}(\xi)$, 则 $F(z)$ 在 G 上单叶, 且在 G 下的象也包含半径为 $r(1 - k/m)$ 圆盘; 又由于有 $F(z) = (1/\rho) f(\rho z)$, 则 $f(z)$ 在 $G_1 = \{z' : z' = \rho z, z \in G\}$ 上单叶, 且 $f(G_1)$ 包含了一个半径为 $R'' = \rho r(1 - k/m) = \rho r(1 - \rho/m)$ 的圆盘. 令 $\rho \rightarrow 1$, 则 $R'' = r(1 - 1/m)$, 再令 $r \rightarrow B_{\text{hol}}$, 则有 $R'' = B_{\text{hol}}(1 - 1/m)$.

注 2 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $B_{\text{har}}^m \rightarrow B_{\text{hol}}$. 显然, 此结论是渐进精确的.

推论 2 设 $f(z) \in \text{Har}_2(D)$, 且 $f_z(0) = 1$ 时, 则有 $B_{\text{har}}^O = B_{\text{har}}^2 \geq B_{\text{hol}}/4$. 此改进了文[12]中定理 2 中的结果, 即 $B_{\text{har}}^O \geq B_{\text{hol}}/2$.

定理 2 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in \text{Har}_K(D)$, 且 $f_z(0) = 1$, 则有

$$B_{\text{har}}^K \geq (1 - |b_1| - \frac{1}{2}(\frac{K-1}{K+1} - \frac{|b_1|^2(K+1)}{K-1}))B_{\text{hol}}.$$

证明 由于 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 为 D 上的调和映照, 则 $h(z)$ 为 D 上的全纯函数; 由于 $f_z(0) = 1$, 显然 $h_z(0) = 1$, 则对任意的 $r \leq B_{\text{hol}}$ 存在一个以零点为中心, r 为半径的圆盘 Δ 为 h 在单叶区域 $G \subset D$ 下的象. 令 $F(\xi) = f \circ h^{-1}(\xi) = \xi + \overline{g \circ h^{-1}(\xi)}$, $\xi \in \Delta$. 显然, $F(\xi)$ 为 Δ 上的 K -拟正则调和映照. 由引理 1 的证明可知, $F(\xi)$ 在 Δ 上单叶. 取 $\xi_1 = \xi \in \Delta, \xi_2 = 0$, 则有

$$|F(\xi) - F(0)| = |\int_{0\xi} F_\xi d\xi + F_\xi d\bar{\xi}| \geq |\int_{0\xi} F_\xi d\xi| - |\int_{0\xi} F_\xi d\bar{\xi}| = |\xi| - |\int_{0\xi} F_\xi d\bar{\xi}|.$$

由于 $|F_\xi(\xi)| \leq k = (K-1)/(K+1) < 1, \xi \in \Delta$, 则有 $|F_\xi(r\xi)| \leq k, \xi \in D$. 由引理 A 可得

$$\frac{|F_\xi(r\xi)|}{k} \leq \frac{\frac{|F_\xi(0)|}{k} + |\xi|}{1 + \frac{|F_\xi(0)|}{k} |\xi|}, \quad \xi \in D,$$

$$\text{即} \quad |F_\xi(\xi)| \leq k \frac{|F_\xi(0)| r + |\xi| k}{kr + |F_\xi(0)| |\xi|}, \quad \xi \in \Delta.$$

$$\text{则有} \quad |F(\xi) - F(0)| \geq |\xi| - \int_{0\xi} k \frac{|F_\xi(0)| r + |\xi| k}{kr + |F_\xi(0)| |\xi|} ds \geq$$

$$(1 - |F_\xi(0)|) |\xi| - \frac{1}{2r} (k - \frac{|F_\xi(0)|^2}{k}) |\xi|^2 = (1 - |b_1|) |\xi| - \frac{1}{2r} (k - \frac{|b_1|^2}{k}) |\xi|^2.$$

令 $\xi \rightarrow \partial\Delta$, 则 $F(\Delta)$ 包含一个半径为 $(1 - |b_1| - \frac{1}{2}(k - \frac{|b_1|^2}{k}))r$ 的圆盘, 又 $F(\xi) = f \circ h^{-1}(\xi)$, 由 $f(z)$ 在 G 上单叶, 且 $f(G)$ 包含了一个半径为 R' 的圆盘, $R' = (1 - |b_1| - \frac{1}{2}(k - \frac{|b_1|^2}{k}))r$. 令 $r \rightarrow B_{\text{hol}}, R' \rightarrow (1 - |b_1| - \frac{1}{2}(\frac{K-1}{K+1} - \frac{|b_1|^2(K+1)}{K-1}))B_{\text{hol}}$.

注 3 $R' = (1 - |b_1| - \frac{1}{2}(\frac{K-1}{K+1} - \frac{|b_1|^2(K+1)}{K-1}))B_{\text{hol}}, (0 \leq |b_1| \leq \frac{K-1}{K+1})$ 为关于 $|b_1|$ 的减函数. 当

$|b_1| = \frac{K-1}{K+1}$ 时, $R' = \frac{2}{K+1} B_{\text{hol}}$; 而文献[12]中定理 2 的结果为 $R'_0 = \frac{2}{K+1} B_{\text{hol}}$. 显然, $R'_0 \leq R'$.

定理 3 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 为 D 上的 K -拟正则调和映照, 如果 $h(z)$ 在 D 上单叶, 则 f 在 D 上单叶, 即 f 为拟共形调和映照.

证明 由 $h(z)$ 在 D 上单叶, 令 $F(\xi) = f \circ h^{-1}(\xi)$, $\xi \in h(D)$. 因 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 为 D 上的 K -拟正则调和映照, 则有 $|\mu_f| = |\frac{f_{\bar{z}}}{f_z}| \leq k = \frac{K-1}{K+1} < 1$, 所以有 $|\mu_F| = |\frac{F_{\bar{\xi}}}{F_{\xi}}| = |\frac{f_{\bar{z}}}{f_z}| \leq k = \frac{K-1}{K+1} < 1$. 则可知 $F(\xi)$ 为 $h(D)$ 上的 K -拟正则调和映照, 且 $|F_{\xi}| \leq k, \xi \in h(D)$. 对于 $\forall \xi_1, \xi_2 \in h(D)$, 有

$$|F(\xi_1) - F(\xi_2)| = \left| \int_{\xi_1 \xi_2} F_{\xi} d\xi + F_{\bar{\xi}} d\bar{\xi} \right| \geq \left| \int_{\xi_1 \xi_2} F_{\xi} d\xi \right| - \left| \int_{\xi_1 \xi_2} F_{\bar{\xi}} d\bar{\xi} \right| \geq \\ |\xi_1 - \xi_2| - k |\xi_1 - \xi_2| = |\xi_1 - \xi_2| (1 - k).$$

则 $F(\xi)$ 在 $h(D)$ 上单叶, 又由 $h(z)$ 在 D 上单叶, 所以 f 在 D 上单叶, 即 f 为拟共形调和映照.

参考文献:

- [1] BLOCH A. Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation[J]. Annales De La Faculté Des Sciences De Toulouse: Sér 3, 1926, 17: 1-12.
- [2] AHLFORS L V. An extension of Schwarz's lemma[J]. Trans Amer Math Soc, 1938, 43: 359-364.
- [3] BONK M. On Bloch's constant[J]. Proc Amer Math Soc, 1990, 110: 889-894.
- [4] CHEN Huai-hui, GAUTHIER P M. On Bloch's constant[J]. J Anal Math, 1996, 69(2): 275-291.
- [5] LIU Ming-sheng. Estimates on Bloch constants for planar harmonic mappings[J]. Science in China (Series A): Mathematics, 2008, 52(1): 87-93.
- [6] CHEN Huai-hui, GAUTHIER P M. Bloch constants in several variables[J]. Trans Amer Math Soc, 2001, 353(4): 1371-1386.
- [7] 夏小青, 黄心中. 平面有界调和函数的 Bloch 常数估计[J]. 数学年刊, 2010, 31A(6): 769-776.
- [8] HUANG Xin-zhong. Estimates on Bloch constants for planar harmonic mappings[J]. J Math Anal Appl, 2007, 337(2): 880-887.
- [9] GRIGORYAN A. Landau and Bloch theorems for harmonic mappings[J]. Complex Variable Theory Appl, 2006, 51(1): 81-87.
- [10] CHEN Huai-hui, GAUTHIER P M, HENGARTNER W. Bloch constants for planar harmonic mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 128(11): 3231-3240.
- [11] COLONNA F. The Bloch constant of bounded harmonic mappings[J]. Indiana Univ Math J, 1989, 38(4): 829-840.
- [12] CHEN Huai-hui, GAUTHIER P M. The landau theorem and bloch theorem for planar harmonic and Pluriharmonic mappings [J]. Proc Amer Math Soc, 2011, 139: 583-595.
- [13] GARNETT J B. Bounded analytic functions; Graduate texts in mathematics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

Bloch Constant of Harmonic Mappings

LI Dong-zheng, CHEN Xing-di

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: By the refined Schwarz lemma, we study the Bloch constants for open harmonic mappings and K -quasiregular harmonic mappings and improve the corresponding results obtained by Chen Huai-hui and P. M. Gauthier. We also get an asymptotically sharp estimate for open harmonic mappings expressed by the Bloch constant of holomorphic functions and give an estimate represented by the coefficient $|b_1|$ for K -quasiregular harmonic mappings.

Keywords: quasiregular harmonic mapping; open harmonic mapping; Bloch constant; Schwarz lemma

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)