第 33 卷　第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 33　No. 1
2012 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2012

文章编号： 1000-5013(2012)01-0099-04

乘积系统中熵点的注记

许清，陈尔明

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 利用 Bowen 拓扑熵引入熵点的概念及性质，探讨 n 阶乘积动力系统中的 Bowen 拓扑熵，得出 n 阶乘积动力系统中熵点的性质及其构造.

关键词： 拓扑熵；熵点；(n,ε)分离集合；(n,ε)扩张集

中图分类号： O 189　　　**文献标志码：** A

熵是由著名数学家 Komogrov 在 1958 年首先引入的，随着对熵的深入研究，熵的局部化研究成为近几年来的重要课题之一. 1993 年，Blanchard 等[1-2]引入了熵对的概念，证明系统存在极大的零熵因子，并且给出拓扑熵对与测度熵对的联系. 黄文等[3-4]推广了熵对的概念，并且给出了熵串的概念. 近年来，YE 等[5]在熵对和熵串的基础上，提出了熵点、熵集的概念，证明了熵点的若干性质，还证明了零熵系统不存在熵点，以及具有正熵的遍历测度的支撑包含一致熵点等重要结果. 本文利用 Bowen 拓扑熵引入熵点的概念及性质，探讨 n 阶乘积动力系统中的 Bowen 拓扑熵 .

1　定义及引理

设(X,T)为动力系统，d^X 为 X 上与拓扑相容的度量，对任意 $n\in\mathbf{N}$，$x_1,x_2\in X$，定义 $d_n(x_1,x_2)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} d(T^kx_1,T^kx_2)$，则 d_n 为 X 上与拓扑相容的度量.

定义 1[4-6]　设(X,T)为具有度量 d 的动力系统 .

1) 对 $n\geqslant1$ 和 $\varepsilon>0$，称有限集 A 为 X 一个(n,ε)分离集，如果对 X 中任意两个不同的点 x_1,x_2，均有 $d_n(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon$ 成立；用 $s_n(n,\varepsilon,T)$表示(X,T)具有最多元素个数的(n,ε)分离集的元素个数.

2) 对 $n\geqslant1$ 和 $\varepsilon>0$，称有限集 A 为 X 一个(n,ε)张成集，如果对 X 的任意点 x，存在点 $y\in A$，使得 $d_n(x_1,x_2)<\varepsilon$ 成立；用 $Y_n(n,\varepsilon,T)$表示(X,T)具有最少元素个数的(n,ε)张成集的元素个数.

引理 1[4]　对每个 $n\in\mathbf{N}$，有 $r_n(n,\varepsilon,T)\leqslant s_n(n,\varepsilon,T)\leqslant r_n(n,\varepsilon/2,T)$.

X 为紧度量空间，$s_n(n,\varepsilon,T)$及 $r_n(n,\varepsilon,T)$均为有限数，令 $r(\varepsilon,T)=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\dfrac{1}{n}\log r_n(n,\varepsilon,T)$和 $s(\varepsilon,T)=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\dfrac{1}{n}\log s_n(n,\varepsilon,T)$，当 $\varepsilon\to0_+$ 时，$r(\varepsilon,T)$和 $s(\varepsilon,T)$关于 ε 单调上升，且极限存在.

引理 2[4]　设(X,T)为动力系统，则系统拓扑熵为 $h(d^X,T,X)=\lim\limits_{\varepsilon\to0_+}s(\varepsilon,T)=\lim\limits_{\varepsilon\to0_+}r(\varepsilon,T)$ (d^X 可省略). 此外，$r(\varepsilon,T)$和 $s(\varepsilon,T)$不依赖于相容度量 d^X 的选取.

引理 3[4]　设$\underline{r(\varepsilon,T)}=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\dfrac{1}{n}\log r_n(n,\varepsilon,T)$和$\underline{s(\varepsilon,T)}=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\dfrac{1}{n}\log s_n(n,\varepsilon,T)$，则存在极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0_+}\underline{s(\varepsilon,T)}$，$\lim\limits_{\varepsilon\to0_+}\underline{r(\varepsilon,T)}$，且 $h(d^X,T,X)=\lim\limits_{\varepsilon\to0_+}\underline{s(\varepsilon,T)}=\lim\limits_{\varepsilon\to0_+}\underline{r(\varepsilon,T)}$.

定义 2[5]　称 $x\in X$ 为熵点，如果 $h(d,T,K)>0$，其中 K 为 x 的任意闭邻域，用 $E_p(X,T)$记全体熵点的集合.

收稿日期： 2010-07-28

通信作者： 陈尔明(1950-)，男，教授，主要从事拓扑动力系统的研究. E-mail：erming_chen@hqu.edu.cn.

称 $x\in X$ 为完全熵点,如果 $h(d,T,K)=h(d,T,X)>0$,其中 K 为 x 的任意闭邻域,用 $E_p^f(X,T)$ 记全体完全熵点的集合.

定义 3[3-4] 设 $\pi_i:(X_i,T_i)\to(Y_i,S_i)(i=1,\cdots,n)$为因子映射,$T_i:X_i\to X_i$,$S_i:Y_i\to Y_i$ 为连续映射,则有

$$\prod_{i=1}^{n}\pi_i:\prod_{i=1}^{n}X_i\to\prod_{i=1}^{n}Y_i,$$

使得 $\prod_{i=1}^{n}\pi_i(x_1,\cdots,x_n)=(\pi_1(x_1),\cdots,\pi_n(x))$ 对每一个$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\prod_{i=1}^{n}X_i$ 成立,那么 $\prod_{i=1}^{n}\pi_i$:$(\prod_{i=1}^{n}X_i,\prod_{i-1}^{n}T_i)\to(\prod_{i=1}^{n}Y_i,\prod_{i=1}^{n}S_i)$ 也是因子映射.

引理 4[6] 设(X,T)为动力系统,而且 d^X 为 X 上的度量.令 $K_1,\cdots,K_n\subseteq X(m\in\mathbf{N})$,那么 $r(\varepsilon,T,\bigcup_{i=1}^{m}K_i=\max_{1\leqslant i\leqslant m}r(\varepsilon,T,K_i)$,$\forall\varepsilon>0$,有 $h(d^X,T,\bigcup_{i=1}^{m}K_i)=\max_{1\leqslant i\leqslant m}h(d^X,T,K_i)$.

2 定理及相关证明

定理 1 设$(X_i,T_i)(i=1,\cdots,n)$为动力系统,$T_i:X_i\to X_i$ 为连续映射,d^{X_i},d 分别为 $X_i(i=1,\cdots,n)$,$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 上的度量,那么有

$$h(d,T_1\times T_2\times\cdots\times T_n,X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)=\sum_{i=1}^{n}h(d^X,T_i,X_i).$$

证明 设 K 为 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的紧子集,由于 $P_i:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to X_i$ 是到第 i 个坐标的投射,因而是连续的.于是,$P_i(K)$是 X_i 的紧子集.对于 $i=1,\cdots,n$,如果 F_i 为 $P_i(K)$的一个(n,ε)张成集,那么 $F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$ 是 K 的一个(n,ε)张成集,因此有

$$r_n(\varepsilon,T_1\times T_2\times\cdots\times T_n,K)\leqslant\prod_{i=1}^{n}r_n(\varepsilon,P_i(K),T_i),$$

进一步有

$$r(\varepsilon,T_1\times T_2\times\cdots\times T_n,K)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon,T_1\times T_2\times\cdots\times T_n,K)\leqslant$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\prod_{i=1}^{n}r_n(\varepsilon,T_i,P_i(K))\leqslant\sum_{i=1}^{n}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon,P_i(K),T_i)=\sum_{i=1}^{n}r(\varepsilon,T_i,P_i(K)).$$

所以,有 $h(d,T_1\times T_2\times\cdots\times T_n,K)\leqslant\sum_{i=1}^{n}h(d^{X_i},T_i,P_i(K))$.当 K 为 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 时,有 $h(d,T_1\times T_2\times\cdots\times T_n,X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}h(d^{X_i},T_i,X_i)$.另一方面,如果 E_i 为 X_i 的一个(n,ε)分离集,那么 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 是 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的一个(n,ε)分离集,因此有

$$s_n(\varepsilon,T_1\times T_2\times\cdots\times T_n,X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\geqslant\prod_{i=1}^{n}s_i(\varepsilon,T_i,X_i),$$

从而有

$$s(\varepsilon,T_1\times\cdots\times T_n,X_1\times\cdots\times X_n)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s_n(\varepsilon,T_1\times T_2\times\cdots\times T_n,X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\geqslant$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s_n(\varepsilon,T_1,X_1)+\sum_{i=2}^{n}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s_n(\varepsilon,T_i,X_i)=s(\varepsilon,T_1,X_1)+\sum_{i=2}^{n}\underline{s(\varepsilon,T_1,X_1)}.$$

令 $\varepsilon\to 0_+$,由引理 3 有

$$h(d,T_1\times T_2\times\cdots\times T_n,X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\geqslant h(d^{X_1},T_1,X_1)+\sum_{i=2}^{n}h(d^{X_i},T_i,X_i).$$

综上所述,$h(d,T_1\times\cdots\times T_n,X_1\times\cdots\times X_n)=h(d^{X_1},T_1,X_1)+\sum_{i=2}^{n}h(d^{X_i},T_i,X_i)$.

定理 2 假设 $\pi_i:(X_i,T_i)\to(Y_i,S_i)(i=1,\cdots,n)$为因子映射,$d^{X_i}$,$d^{Y_i}$ 为 X_i,Y_i 上的度量,那么有

$h(d^{Y_1\times\cdots\times Y_n},S_1\times\cdots\times S_n,\pi_1(K_1)\times\cdots\times\pi_n(K_n))\leqslant h(d^{X_1\times\cdots\times X_n},T_1\times\cdots\times T_n,K_1\times\cdots\times K_n)$. 其中：$K_i$ 为 X_i 的闭子集.

证明　由于 $\pi_i:(X_i,T_i)\to(Y_i,S_i)(i=1,\cdots,n)$ 为因子映射，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\varepsilon'>0$，使得 $0<\varepsilon'<\varepsilon$，则当 $d^{X_i}(x_1^i,x_2^i)\leqslant\varepsilon'$ 时，有 $d^{Y_i}(\pi_i x_1^i,\pi_i x_2^i)\leqslant\varepsilon$.

令 E_i 为 K_i 相对于 T_i 的 (n,ε) 张成集，那么 $\pi(E_i)$ 为 $\pi(K_i)$ 相对 S_i 的 (n,ε) 张成集，于是有

$$r_n(S_i,\varepsilon,\pi(K_i))\leqslant r_n(T_i,\varepsilon',K_i).$$

进一步有

$$r(S_1\times\cdots\times S_n,\varepsilon,\pi_1(K_1)\times\cdots\times\pi_i(K_n))\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\prod_{i=1}^{n}r_n(S_i,\varepsilon,\pi_i(K_i))\leqslant$$
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\prod_{i=1}^{n}r_n(T_i,\varepsilon',K_i)=\sum_{i=1}^{n}r(T_i,\varepsilon,K_i).$$

令 $\varepsilon\to0$，由定理 1 有

$$h(d^{Y_1\times\cdots\times Y_n},S_1\times\cdots\times S_n,\pi_1(K_1)\times\cdots\times\pi_n(K_n))\leqslant h(d^{X_1\times\cdots\times X_n},T_1\times\cdots\times T_n,K_1\times\cdots\times K_n).$$

定理 3　设 $\pi_i:(X_i,T_i)\to(Y_i,S_i)(i=1,\cdots,n)$ 为因子映射，那么有

1）$\pi_1\times\cdots\times\pi_n(E_p(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n))\supseteq E_p(Y_1\times\cdots\times Y_n,S_1\times\cdots\times S_n)$；

2）如果 π_i 为开映射，那么有

$$E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n))\supseteq\pi_1^{-1}\times\cdots\times\pi_n^{-1}E_p(Y_1\times\cdots\times Y_n,S_1\times\cdots\times S_n).$$

证明　1）对 $\forall n\in\mathbf{N}$，令 $(y_1,\cdots,y_n)\in E_p(Y_1\times\cdots\times Y_n,S_1\times\cdots\times S_n)K_i^n$ 为 y_i 的半径至多为 $1/n$ 的闭领域．由定理 2 知，存在 $h(T_1\times\cdots\times T_n,\pi_1^{-1}(K_1^n)\times\cdots\times\pi_n^{-1}(K_n^n))\geqslant h(S_1\times\cdots\times S_n,K_1\times\cdots\times K_n)>0$. 用半径至多为 $1/n$ 的闭球覆盖 $\pi_1^{-1}(K_1^n)\times\cdots\times\pi_n^{-1}(K_n^n)$，根据引理 4 知，存在闭球 $B_n\subseteq\prod_{i=1}^{n}X_i$，满足 $h(T_1\times\cdots\times T_n,B_n)=h(T_1\times\cdots\times T_n,\pi_1^{-1}(K_1^n)\times\cdots\times\pi_n^{-1}(K_n^n))$.

由于 X_i 是完备空间，所以 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是完备空间，于是闭球套 $\{B_n,n\in N\}$ 有极限点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$. 令 $\pi(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，易知 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$，那么有 $\pi_1\times\cdots\times\pi_n(E_p(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n))\supseteq E_p(Y_1\times\cdots\times Y_n,S_1\times\cdots\times S_n)$.

2）令 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E_p(Y_1\times\cdots\times Y_n)$ 且 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足 $\pi_1\times\cdots\times\pi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 令 K_n 是以 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为中心半径至多为 $1/n$ 的闭领域，且使得 $\pi_1\times\cdots\times\pi_n(K_n)$ 的半径至多为 $1/n$，由于 π_i 为开映射，$\pi_1\times\cdots\times\pi_n(K_n)$ 为 $(y_1,\cdots,y_n)$ 闭领域，且 $h(S_1\times S_2\times\cdots\times S_n,\pi_1\times\cdots\times\pi_n(K_n))=h(T_1\times T_2\times\cdots\times T_n,K_n)>0$，那么 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E_p(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$. 这就意味着 $\pi_1^{-1}\times\cdots\times\pi_n^{-1}E_p(Y_1\times\cdots\times Y_n,S_1\times\cdots\times S_n)\subseteq E_p(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$.

推论 1　设 $\pi_i:(X_i,T_i)\to(Y_i,S_i)(i=1,\cdots,n)$ 为因子映射，那么有

1）$\pi_1\times\cdots\times\pi_n(E_P^f(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n))\supseteq E_p^f(Y_1\times\cdots\times Y_n,S_1\times\cdots\times S_n)$；

2）如果 π_i 为开映射，那么有

$$(E_P^f(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n))\supseteq\pi_1^{-1}\times\cdots\times\pi_n^{-1}E_p^f(Y_1\times\cdots\times Y_n,S_1\times\cdots\times S_n).$$

证明　类似定理 2 证明.

定理 4　设 $(X_i,T_i)(i=1,\cdots,n)$ 为动力系统，那么有

1）$E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$ 和 $E_P^f(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$ 为闭集；

2）当 $h(T_1\times\cdots\times T_n)>0$ 时，$E_P^f(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)\neq\varnothing$；

3）$E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$ 和 $E_P^f(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$ 为 T 不变的.

证明　1）设 $(x_1^m,x_2^m,\cdots,x_n^m)\in E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)(\forall m\in\mathbf{N})$，由于 $X_1\times\cdots\times X_n$ 为紧空间，那么 $(x_1^m,x_2^m,\cdots,x_n^m)(\forall m\in\mathbf{N})$ 存在收敛的子列，不妨就把它记做 $\{(x_1^m,\cdots,x_n^m)\}_{m=1}^{\infty}$. 设其极限点为 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$，对 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的任意领域 K_n，存在熵点 $(x_1^m,\cdots,x_n^m)\in K_n$，于是 $h(T_1\times\cdots\times T_n,K_n)>0$，从而 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$，所以 $E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$ 为闭集，同理可证 $E_P^f(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$ 也为闭集.

2）由于 $X_1\times\cdots\times X_n$ 为紧空间，选取有限个半径为 1 的闭球 $\{B_1^1,B_2^1,\cdots,B_n^1\}$ 覆盖 $X_1\times\cdots\times X_n$. 根

据引理 4 可知,$h(T_1\times\cdots\times T_n,X_1\times\cdots\times X_n)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}h(T_1\times\cdots\times T_n,B_j^1)$,于是存在 j_1,使 $h(T_1\times\cdots\times T_n,X_1\times\cdots\times X_n)=h(T_1\times\cdots\times T_n,B_{j_1}^1)$. 再取有限个半径为 1/2 的闭球 $\{B_1^{1/2},B_2^{1/2},\cdots,B_n^{1/2}\}$ 覆盖 $B_{j_1}^1$,同理可得,存在 j_2 使得 $h(T_1\times\cdots\times T_n,X_1\times\cdots\times X_n)=h(T_1\times\cdots\times T_n,B_{j_2}^1)$.

根据以上步骤依次类推,对于 $B_{j_{n-1}}^{n-1}$ 来说,存在闭球 $B_{j_n}^1\subset B_{j_{n-1}}^{n-1}$,使 $h(T_1\times\cdots\times T_n,X_1\times\cdots\times X_n)=h(T_1\times\cdots\times T_n,B_{j_n}^1)$,令 $\{(x_1,\cdots,x_n)\}=\bigcap\limits_{n\in N}B_{j_n}^1$,易知 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为完全熵点.

3) 因为 $T:(X,T)\to(X,T)$ 和 $T^{-1}:(X,T)\to(X,T)$ 为同构映射,故根据定理 3 的推论可以得到 $T(E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n))=E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$,$T^{-1}(E_P^f(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n))=E_P^f(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$.

定理 5 设 $(X_i,T_i)(i=1,\cdots,n)$ 为动力系统,那么有

$$E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)=\bigcup_{i=1}^{n}(X_1\times\cdots\times E_P(X_i)\times\cdots\times X_n).$$

证明 设 $(x_1,\cdots,x_n)\in E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$,根据定义 2 可知,对 X_i 的任意闭邻域 K_i 有 $h(d,T_1\times\cdots\times T_n,K_1\times\cdots\times K_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}h(d^{X_i},T_i,K_i)>0$,从而存在 $j\in\{1,\cdots n\}$,使得 $h(d^{X_j},T_j,K_j)>0$. 于是,有 $(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)\in X_1\times\cdots\times E_P(X_j)\times\cdots\times X_n$,即证明 $E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(X_1\times\cdots\times E_P(X_i)\times\cdots\times X_n)$. 反之,设 $(x_1,,\cdots,x_n)\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}(X_1\times\cdots\times E_P(X_i)\times\cdots\times X_n)$,则存在 $m\in\{1,\cdots,n\}$,使得 $(x_1,\cdots,x_m,\cdots,x_n)\in X_1\times\cdots\times E_P(X_m)\times\cdots\times X_n$,从而有 $x_m\in E_P(X_m)$. 那么,有 $h(d^{X_m},T_m,K_m)>0$,K_m 为 x_m 的一个闭邻域. 对于 $(x_1,\cdots,x_m,\cdots,x_n)$ 任意闭邻域 $X_1\times\cdots\times K_m\times\cdots\times X_n$,有 $h(d,T_1\times\cdots\times T_n,X_1\times\cdots\times K_m\times X_{m+1}\times\cdots\times X_n)=\sum\limits_{i\neq m}h(d^{X_i},T_i,X_i)+h(d^{X_m},T_m,K_m)>0$,所以有 $(x_1,\cdots,x_n)\in E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$. 这证明了 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(X_1\times\cdots\times E_P(X_i)\times\cdots\times X_n)\subseteq E_P(X_1\times\cdots\times X_n,T_1\times\cdots\times T_n)$. 综上所述,等式成立.

参考文献:

[1] BLANCHARD F. A disjointness theorem involving topological entropy[J]. Bull Soc Math France,1993(121):465-478.

[2] BLANCHARD F,HOST B,MAASS A,et al. Entropy pairs for a measure[J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems,1995(15):621-632.

[3] HUANG Wen,YE Xiang-dong. A local variational relation and applications[J]. Israel Journal of Mathematics,2006,151(1):237-280.

[4] 叶向东,黄文,邵松. 拓扑动力系统概论[M]. 北京:科学出版社,2008.

[5] YE Xiang-dong,ZHANG Guo-hua. Entropy points and applications[J]. Trans Amer Math Soc,2007,359(12):6167-6186.

[6] WALTERS P. An introduction to ergodic theory[M]. New York:Springer-Verlag,1982.

A Note on Entropy Point in Multiply Dynamical System

XU Qing, CHEN Er-ming

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, by the basis of the notions of entropy point firstly introduced by using Bowen′s definition of topolofical entropy and properties that discussed, the Bowen′s entropy of the product of dynamical system of order n has besn discussed. Some properties of the product of dynamical system of order n are obtained, and so its structure.

Keywords: topological entropy; entropy point; (n,ε)-seperated set; (n,ε)-spanning set

(**责任编辑**:陈志贤 **英文审校**:张金顺,黄心中)