第 32 卷　第 6 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 32　No. 6
2011 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2011

文章编号： 1000-5013(2011)06-0718-03

超空间上 $\mathscr{F}$-混合性的一点注记

许清，陈尔明

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 设(X,T)为度量空间，$T:X\to X$是连续映射.考虑由X的非空紧子集$\kappa(X)$和由度量d诱导的 Hausdorff 度量构成的超空间系统$(\kappa(X),\bar{T})$，且$\bar{T}:\kappa(X)\to\kappa(X)$，$\bar{T}(K)=\{T(x):x\in K\}$，$K\in\kappa(X)$. 由此得到在$\mathscr{F}$为滤子时，$T$的$\mathscr{F}$-混合性与$\bar{T}$的$\mathscr{F}$-混合性之间的联系.

关键词： $\mathscr{F}$-混合的；$\mathscr{F}$-传递的；超空间；滤子；族

中图分类号： O 189.11　　　**文献标志码：** A

研究系统的混合性是动力系统的重要课题之一，而系统的混合性是通过系统的传递性来表现的[1]. Roman-Flores[2]证明了$\bar{T}$是传递的，蕴含着T是传递的，反之却不成立. Banks[3]中证明了$\bar{T}$的混合性和T的混合性之间的联系. Gottschalk 和 Hedlund 最早使用族的方法研究动力系统，其后 Akin 系统地介绍了族的方法，而且给出了$\mathscr{F}$-混合性的定义[4]. 本文介绍(X,T)的$\mathscr{F}$-混合性与其诱导超空间$(\kappa(X),\bar{T})$的$\mathscr{F}$-混合性之间的联系.

1　基本假设

对于拓扑空间(X,T)，$\bar{T}$是由T诱导的且定义在$\kappa(X)=\{K\subset X, K\text{ 是 }X\text{ 的紧子集}\}$上的连续映射，对$(\kappa(X),\bar{T})$赋予 Vietories 拓扑，易知它也为拓扑空间，且其拓扑基为

$$\upsilon(U_1,\cdots,U_k)=\{K\in\kappa(K):K\subset\bigcup_{i=1}^{k}U_i\text{ 且 }K\cap U_i\neq\varnothing, i=1,\cdots,k\}.$$

其中：$U_1,U_2,\cdots,U_n$为X的非空开子集.

当(X,d)为度量空间时，那么空间$\kappa(X)$被赋予 Hausdorff 度量H，即

$$H(A,B)=\inf\{\varepsilon;B_\varepsilon(A)\supseteq B\text{ 且 }A\subseteq B_\varepsilon(B)\}.$$

其中：$B_\varepsilon(A)=\{x\in X,d(x,A)\leqslant\varepsilon\}$；$A,B\in\kappa(X)$. 此度量与 Vietories 拓扑是相兼容的[5].

2　相关定义

设Z_+为正整数构成的集合，用$P=P(Z_+)$表示Z_+的所有子集构成的集合.

定义 1[1]　P的非空子集$\mathscr{F}$称作族，如果它满足遗传向上性，即对于F_1,F_2，$F_1\in\mathscr{F}$且$F_1\subseteq F_2$，则有$F_2\in\mathscr{F}$.

定义 2[1]　Z_+的一个子集族$\mathscr{F}$称为一个滤子，是指它满足：

(1) $\varnothing\notin\mathscr{F}$；

(2) 如果 $F_1\in\mathscr{F}$ 且 $F_1\subseteq F_2$，那么有 $F_2\in\mathscr{F}$；

(3) $F_1,F_2\in\mathscr{F}$，$F_1\cap F_2\in\mathscr{F}$.

定义 3[4]　动力系统(X,T)是$\mathscr{F}$-传递的，如果对X的任意非空开子集U,V，及族$\mathscr{F}$，则回复时间集$N(U,V)=\{n\in Z_+:T^nU\cap V\neq\varnothing\}\in\mathscr{F}$.

收稿日期： 2010-07-28

通信作者： 陈尔明(1950-)，男，教授，主要从事拓扑动力系统的研究. E-mail：ermingchen@hqu.edu.cn.

定义 4　动力系统(X,T)是完全 $\mathscr{F}$-传递的，如果对$\forall n\in Z_+$，(X^n,T^n)是 $\mathscr{F}$-传递的.

定义 5[4]　动力系统(X,T)是 $\mathscr{F}$-混合的，如果系统$(X\times X,T\times T)$是 $\mathscr{F}$-传递的，即对 X 的任意非空开子集 U_1,U_2,V_1,V_2，$N(U_1\times U_2,V_1\times V_2)=N(U_1,V_1)\cap N(U_2,V_2)\in\mathscr{F}$.

3　定理及主要证明

引理 1　设(X,T)是动力系统，$\mathscr{F}$是滤子，对于连续映射 T，有：

(1) 如果 T 是 $\mathscr{F}$-混合的，则 T 是完全 $\mathscr{F}$-传递的；

(2) 如果 T 是 $\mathscr{F}$-混合的，且 $U_1,U_2,\cdots,U_n,V_1,V_2,\cdots,V_n$ 是 X 的非空开子集，那么存在 $F\in\mathscr{F}$，使得 $F\subset N(U_i,V_i)$，$i=1,\cdots,n$；

(3) 如果 T 是 $\mathscr{F}$-混合的当且仅当对 X 的任意的非空开子集 U,V，那么存在 $F\in\mathscr{F}$，使得 $F\subset N(U,V)$且 $F\subset N(V,V)$；

(4) 如果 T 是 $\mathscr{F}$-混合的当且仅当对 X 的任意非空子集 U,V,W，那么存在 $F\in\mathscr{F}$，使得 $F\subset N(U,V)$且 $F\subset N(V,W)$.

证明　(1) 假设 T 是 $\mathscr{F}$-混合的，要证明 T 是完全 $\mathscr{F}$-传递的，则需要证明$(X^{(n)},T^{(n)})$是 $\mathscr{F}$-传递的 $\forall n\in N$. 这里，$X^{(n)}=X\times X\times\cdots\times X$，$T^{(n)}=T\times T\times\cdots\times T$($n$ 次). 那么，对于 X 的任意非空开子集 $U_1,U_2,\cdots,U_n,V_1,V_2,\cdots,V_n$，则只要证明

$$N(U_1\times U_2\times\cdots\times U_n,V_1\times V_2\times\cdots\times V_n)\in\mathscr{F}$$

即可.

由于有

$$N(U_1\times U_2\times\cdots\times U_n,V_1\times V_2\times\cdots\times V_n)=\bigcap_{i=1}^{n}N(U_i,V_i),$$

且 T 是 $\mathscr{F}$-混合的，那么$(X\times X,T\times T)$是 $\mathscr{F}$-传递的，从而有

$$N(U_i\times U_{i+1},V_i\times V_{i+1})=N(U_i,V_i)\cap N(U_{i+1},V_{i+1})\in\mathscr{F}.$$

由于有

$$\bigcap_{i=1}^{n}N(U_i,V_i)\in N(U_i,V_i)\cap N(U_{i+1},V_{i+1}),$$

根据滤子的性质(定义 2)，可知$\bigcap_{i=1}^{n}N(U_i,V_i)\in\mathscr{F}$，从而说明有

$$N(U_1\times U_2\times\cdots\times U_n,V_1\times V_2\times\cdots\times V_n)\in\mathscr{F}.$$

所以，T 是完全 $\mathscr{F}$-传递的.

(2) 假设 T 是 $\mathscr{F}$-混合的，根据(1)可知，T 是完全 $\mathscr{F}$ 传递的. 那么，对于 X 的任意的非空开子集 $U_1,U_2,\cdots,U_n,V_1,V_2,\cdots,V_n$，有

$$N(U_1\times U_2\times\cdots\times U_n,V_1\times V_2\times\cdots\times V_n)=\bigcap_{i=1}^{n}N(U_i,V_i)\in\mathscr{F},$$

则令 $F=\bigcap_{i=1}^{n}N(U_i,V_i)$即可.

(3) 设 T 是 $\mathscr{F}$-混合的，令 $U_1=U,U_2=V,V_1=V_2=V$，根据(2)即可证得. 反之，对于 X 的任意的非空开子集 U,V，存在 $F\in\mathscr{F}$，使得 $F\subset N(U,V)$且 $F\subset N(V,V)$，从而有

$$F\subset N(U,V)\cap N(V,V)=N(U\times V,V\times V),$$

所以 $N(U\times V,V\times V)\in\mathscr{F}$. 这便可说明$(X\times X,T\times T)$是 $\mathscr{F}$-传递的，从而 T 是 $\mathscr{F}$-混合的.

(4) 设 T 是 $\mathscr{F}$-混合的，令 $U_1=U,U_2=V,V_1=V,V_2=W$，根据(2)即可证得. 反之，对于 X 的任意的非空开子集 U,V,W，存在 $F\in\mathscr{F}$，使得 $F\subset N(U,V)$且 $F\subset N(V,W)$，从而有

$$F\subset N(U,V)\cap N(V,W)=N(U\times V,V\times W),$$

所以 $N(U\times V,V\times W)\in\mathscr{F}$. 这便可说明了$(X\times X,T\times T)$是 $\mathscr{F}$-传递的，从而 T 是 $\mathscr{F}$-混合的.

定理 1　设(X,T)是动力系统，$\mathscr{F}$是滤子，$\overline{T}:\kappa(X)\to\kappa(X)$是由 T 诱导的连续映射，那么下面 3 个条件等价.

(1) T 是 $\mathscr{F}$-混合的.

（2）$\overline{T}$ 是 $\mathscr{F}$-混合的.

（3）$\overline{T}$ 是 $\mathscr{F}$-传递的.

证明 （1）蕴含(2). 假设 T 是 $\mathscr{F}$-混合的，由引理(1)可得知，T 的 m 次乘积 $\underbrace{T\times T\times\cdots\times T}_{m}:X\times X\times\cdots\times X\to X\times X\times\cdots\times X(\forall m\in N)$ 是 $\mathscr{F}$-传递的.

要证明 $\overline{T}$ 是 $\mathscr{F}$-混合的，只需证明 $\kappa(X)$ 的 Vietories 拓扑基中的任意元素 $\upsilon(U_1^i,\cdots,U_k^i)$，$\upsilon(V_1^i,\cdots,V_k^i)$，$i=1,2$，存在 $F\in\mathscr{F}$，使得 $F\subset N(\upsilon(U_1^i,\cdots,U_k^i),\upsilon(V_1^i,\cdots,V_k^i))$，$i=1,2$.

事实上，由引理(2)可知，存在 $F\in\mathscr{F}$，使得 $F\subset N(U_j^i,V_j^i)$，$i=1,2;j=1,\cdots,k$. 由于 $\mathscr{F}$ 为滤子，则可得 $N(U_j^i,V_j^i)\in\mathscr{F}$，$i=1,2;j=1,\cdots,k$，从而 $\bigcap_{i=1}^{2}\bigcap_{j=1}^{k}N(U_j^i,V_j^i)\in\mathscr{F}$.

那么，对任意一个 $n\in\bigcap_{i=1}^{2}\bigcap_{j=1}^{k}N(U_j^i,V_j^i)$，选取 $x_{i,j}\in U_j^i$，使得 $y_{i,j}=T^n(x_{i,j})\in V_j^i$，$i=1,2;j=1,\cdots,k$. 定义 $K_1=\{x_{1,1},\cdots,x_{1,k}\}$，$K_2=\{x_{2,1},\cdots,x_{2,k}\}$. 因此，$K\in\upsilon(U_1^i,\cdots,U_1^i)$，$\widetilde{T}^n(K_i)\in\upsilon(V_1^i,\cdots,V_k^i)$，$i=1,2$. 这便说明 T 是 $\mathscr{F}$-混合的.

（2）蕴含(3). 由于 $\widetilde{T}$ 是 $\mathscr{F}$-混合的，根据引理(1)，那么对任意的 $n\in N$，$(X^{(n)}T^{(n)})$ 是 $\mathscr{F}$-传递的，从而它是 $\mathscr{F}$-传递的.

（3）蕴含(1). 要证明 T 是 $\mathscr{F}$-混合的，根据引理(4)，只需证明对 X 的任意非空开子集 U,V_1,V_2 存在 $F\in\mathscr{F}$，使得 $F\subset N(U,V_1)$ 且 $F\subset N(U,V_2)$.

事实上，由于 $\widetilde{T}$ 是 $\mathscr{F}$-传递的，那么可以找到 $K\in\upsilon(U)$，使得 $\widetilde{T}^n(K)\in\upsilon(V_1,V_2)$，$\forall n\in F$.

选取 $x,y\in K\subset U$，使得 $\widetilde{T}^n(x)\in V_1$，$\widetilde{T}^n(y)\in V_2$. 这说明 $\mathscr{F}\subset N(U,V_1)$ 且 $\mathscr{F}\subset N(U,V_2)$，从而有

$$N(U\times U,V_1\times V_2)=N(U,V_1)\cap N(U,V_2)\in\mathscr{F},$$

即 T 是 $\mathscr{F}$-混合的.

参考文献：

[1] 叶向东，黄文，邵松. 拓扑动力系统概论[M]. 北京：科学出版社，2008.

[2] ROMAN-FLORES H. A note on transitivity in set-valued discrete systems[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 17(1): 99-104.

[3] BANKS J. Chaos for induced hyperspace maps[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 25(3): 681-685.

[4] SHAO Song, YE Xiang-dong. $\mathscr{F}$-mixing and weak disjointness[J]. Topology and Its Applications, 2004, 135(1): 231-247.

[5] WICKS K. Fractals and hyperspaces[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

A Note on $\mathscr{F}$-Mixing in Hyperspace Maps

XU Qing, CHEN Er-ming

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Suppose (X,T) be a metric space, $T:X\to X$ a continuous map. If we consider the space $\kappa(X),\overline{T})$ of all non-empty compact subsets of X endowed with the Hausdorff metric induced by d and $\overline{T}:\kappa(X)\to\kappa(X)$, $\overline{T}(K)=\{T(x):x\in K\}$, $K\in\kappa(X)$, then the aim of this work is to obtain the $\mathscr{F}$-mixing relationships between T and $\overline{T}$ when $\mathscr{F}$ is filter.

Keywords: $\mathscr{F}$-mixing; $\mathscr{F}$-transitive; hyperspace; filter; family

（**责任编辑**：黄晓楠 **英文审校**：张金顺，黄心中）