

文章编号: 1000-5013(2011)06-0714-04

# 二阶矩随机 Hilbert 边值问题

姚村, 林峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 通过对称扩张的方法, 把二阶矩随机 Hilbert 边值问题转化为二阶矩随机 Riemann 边值问题, 最终求解二阶矩随机 Hilbert 边值问题.

**关键词:** 边值问题; Hilbert 问题; Riemann 问题; 二阶矩; 对称扩张; 随机过程

**中图分类号:** O 175.8

**文献标志码:** A

设  $L$  是一简单光滑闭曲线, 以反时针方向为正, 它把复平面  $C$  分成内部区域  $S^+$  和外部区域  $S^-$ ,  $(\Omega, F, P)$  是概率空间. 文献[1]讨论了随机奇异积分的存在性, 并且得到了随机 Cauchy 型积分的 Plemelj 公式; 文献[2]讨论了随机 Riemann 边值问题的解. 本文通过对称扩张的方法<sup>[3]</sup>, 求解随机 Hilbert 边值问题.

## 1 预备知识

随机 Hilbert 边值问题是指, 求在  $S^+$  内均方解析的复随机过程  $\Phi^+(\omega, z) = u(\omega, z) + iv(\omega, z)$ , 均方连续到  $S^+ + L$  上, 满足边值条件

$$\operatorname{Re}\{[a(\zeta) + b(\zeta)]\Phi^+(\omega, \zeta)\} = c(\omega, \zeta), \quad \zeta \in L. \quad (1)$$

式(1)中:  $a(\zeta), b(\zeta)$  都是已给在  $L$  上  $\in H$  的实函数;  $c(\omega, \zeta)$  是  $(\Omega, F, P)$  上的一个实值随机过程, 它依赖于参数  $\zeta \in L$ , 假定它是一个二阶矩过程, 并且满足

$$R_c(\zeta, \zeta') = E\{c(\omega, \zeta) \overline{c(\omega, \zeta')}\} \in H(L \times L).$$

式(1)也可改写为

$$a(\zeta)u(\omega, \zeta) - b(\zeta)v(\omega, \zeta) = c(\omega, \zeta), \quad \zeta \in L. \quad (2)$$

由于经过保形映射, 可以把  $S^+$  变为单位圆内部, 而  $L$  变为其圆周, 且仍以反时针方向为正向. 这样, 只考虑问题(1)在  $L$  为单位圆时的解, 以下总假设  $S^+$  就是单位圆域  $|z| < 1$ ,  $L$  是单位圆周  $|z| = 1$ .

## 2 随机函数在圆外的扩张

为了求解圆内随机 Hilbert 问题, 应设法把它转化为随机 Riemann 问题. 把单位圆域  $S^+$  中的随机函数  $\Phi(\omega, z)$  按如下定义给出其在外域  $S^-$  中的对称扩张或对称函数, 有

$$\Phi_*(\omega, z) = \overline{\Phi(\omega, \frac{1}{z})} = \bar{\Phi}(\omega, \frac{1}{z}). \quad (3)$$

特别地,  $\Phi_*(\omega, \infty) = \overline{\Phi(\omega, 0)}$ .

**定理 1** 若  $\Phi(\omega, z)$  在  $S^+$  内均方解析, 则  $\Phi_*(\omega, z)$  在  $S^-$  内均方解析.

**证明** 因  $\Phi(\omega, z)$  在  $S^+$  内均方解析, 则存在随机过程  $\eta(\omega, z)$ , 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left\{ \left| \frac{\Phi(\omega, z+h) - \Phi(\omega, z)}{h} - \eta(\omega, z) \right|^2 \right\} = 0.$$

收稿日期: 2010-07-12

通信作者: 林峰(1962-), 男, 副教授, 主要从事函数论的研究. E-mail: lfeng@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2007J0183)

由 Loeve 准则<sup>[4]</sup>可知

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} E \left\{ \left[ \frac{\Phi(\omega, z+h) - \Phi(\omega, z)}{h} \right] \overline{\left[ \frac{\Phi(\omega, z+k) - \Phi(\omega, z)}{k} \right]} \right\} = E \left| \eta(\omega, z) \right|^2,$$

又有

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} E \left\{ \left[ \frac{\Phi_*(\omega, z+h) - \Phi_*(\omega, z)}{h} \right] \overline{\left[ \frac{\Phi_*(\omega, z+k) - \Phi_*(\omega, z)}{k} \right]} \right\} = \\ &\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} E \left\{ \left[ \frac{\Phi(\omega, \frac{1}{z+h}) - \Phi(\omega, \frac{1}{z})}{h} \right] \overline{\left[ \frac{\Phi(\omega, \frac{1}{z+k}) - \Phi(\omega, \frac{1}{z})}{k} \right]} \right\} = \\ &\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} E \left\{ \left[ \frac{\Phi(\omega, \frac{1}{z+h}) - \Phi(\omega, \frac{1}{z})}{h} \right] \left[ \frac{\Phi(\omega, \frac{1}{z+k}) - \Phi(\omega, \frac{1}{z})}{k} \right] \right\} = \\ &\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} E \left\{ \left[ \frac{1}{z(z+h)} \frac{\Phi(\omega, \frac{1}{z}) - \Phi(\omega, \frac{1}{z+h})}{\frac{1}{z} - \frac{1}{z+h}} \right] \left[ \frac{1}{z(z+k)} \frac{\Phi(\omega, \frac{1}{z}) - \Phi(\omega, \frac{1}{z+k})}{\frac{1}{z} - \frac{1}{z+k}} \right] \right\} = \\ &\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{1}{|z|^4} E \left\{ \left[ \frac{\Phi(\omega, \frac{1}{z}) - \Phi(\omega, \frac{1}{z+h})}{\frac{1}{z} - \frac{1}{z+h}} \right] \overline{\left[ \frac{\Phi(\omega, \frac{1}{z}) - \Phi(\omega, \frac{1}{z+k})}{\frac{1}{z} - \frac{1}{z+k}} \right]} \right\} = \frac{1}{|z|^4} E \left| \eta(\omega, \frac{1}{z}) \right|^2. \end{aligned}$$

由 Loeve 准则<sup>[4]</sup>可知

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left\{ \left| \frac{\Phi_*(\omega, z+h) - \Phi_*(\omega, z)}{h} - \frac{1}{|z|^2} \overline{\eta(\omega, \frac{1}{z})} \right|^2 \right\} = 0,$$

即知  $\Phi_*(\omega, z)$  在  $S^-$  内均方解析.

如果  $\Phi(\omega, z)$  能从  $S^+$  内均方连续延拓到单位圆周  $L: |\zeta|=1$  上, 则  $\Phi_*(\omega, z)$  也能从  $S^-$  内均方连续延拓到  $L$  上, 且因为  $\zeta = \frac{1}{z}$ , 故有

$$\Phi_*(\omega, \zeta) = \overline{\Phi^+(\omega, \zeta)}. \tag{4}$$

从而, 若  $\Phi(\omega, z)$  在  $S^+$  内均方解析, 均方连续于  $S^+ + L$  上, 则有

$$\Omega(\omega, z) = \begin{cases} \Phi(\omega, z), & z \in S^+, \\ \Phi_*(\omega, z), & z \in S^-. \end{cases} \tag{5}$$

这就是一分区均方解析函数, 以  $L$  为跳跃曲线, 它在  $L$  上的边值满足条件为

$$\Omega^-(\omega, \zeta) = \overline{\Omega^+(\omega, \zeta)}. \tag{6}$$

### 3 随机 Hilbert 边值问题的转化

假定  $a^2 + b^2 \neq 0$  在  $L$  上. 利用上段方法, 把所求函数  $\Phi^+(\omega, z) = \Phi(\omega, z)$  对称扩张到  $S^-$  中, 可得分区均方解析函数  $\Omega(\omega, z)$  (式(5)), 则可把式(1)改写为

$$(a(\zeta) + ib(\zeta))\Omega^+(\omega, \zeta) + (a(\zeta) - ib(\zeta))\Omega^-(\omega, \zeta) = 2c(\omega, \zeta), \quad \zeta \in L. \tag{7}$$

令  $G(\zeta) = -\frac{a(\zeta) - ib(\zeta)}{a(\zeta) + ib(\zeta)}, g(\omega, \zeta) = \frac{2c(\omega, \zeta)}{a(\zeta) + ib(\zeta)}$ , 因为有

$$\begin{aligned} R_g(\zeta, \zeta') &= E\{g(\omega, \zeta) \overline{g(\omega, \zeta')}\} = E\left\{ \frac{2c(\omega, \zeta)}{a(\zeta) + ib(\zeta)} \overline{\frac{2c(\omega, \zeta')}{a(\zeta') + ib(\zeta')}} \right\} = \\ &\frac{4R_c(\zeta, \zeta')}{[a(\zeta) + ib(\zeta)][\overline{a(\zeta') + ib(\zeta')}]}, \end{aligned}$$

又因为  $a(\zeta), b(\zeta) \in H$ , 因此可得

$$[a(\zeta) + ib(\zeta)][\overline{a(\zeta') + ib(\zeta')}] \in H(L \times L).$$

再由  $R_c(\zeta, \zeta') \in H(L \times L)$ , 可知

$$R_g(\zeta, \zeta') \in H(L \times L).$$

由此,问题(1)可转化为随机 Riemann 问题,即

$$\Omega^+(\omega, \zeta) = G(\zeta)\Omega^-(\omega, \zeta) + g(\omega, \zeta), \quad \zeta \in L. \tag{8}$$

满足条件式(6)的随机 Riemann 问题(8)的解,就是问题(1)的解. 所以只需求出随机 Riemann 问题(8)的解 $\Omega(\omega, z)$ ,作出 $\Omega_*(\omega, z)$ ,再求出

$$\Omega_0(\omega, z) = \frac{1}{2}[\Omega(\omega, z) + \Omega_*(\omega, z)], \tag{9}$$

便是原问题(1)的解  $\Phi(\omega, z) = \Omega_0(\omega, z)$ ,  $z \in S^+$ .

### 4 随机 Hilbert 边值问题的求解

设  $X(z)$  为  $G(\zeta)$  的典则函数,问题(8)的指数为  $\kappa = \text{Ind}_L G(\zeta)$ , 是一偶数.

$$X(z) = \begin{cases} C \exp(\Gamma(z)), & |z| < 1, \\ C z^{-\kappa} \exp(\Gamma(z)), & |z| > 1. \end{cases}$$

其中:  $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log [\zeta^{-\kappa} G(\zeta)] d\zeta}{\zeta - z}$ ,  $C = \exp(-\frac{i\alpha}{2})$ . 由文献[5] 可求得

$$X_*(z) = \overline{X}(\frac{1}{z}) = z^{\kappa} X(z). \tag{10}$$

下面,对随机 Hilbert 边值问题进行求解.

(i) 当  $\kappa \geq 0$  时,由文献[2]可知,随机 Riemann 问题(8)的解为

$$\Omega(\omega, z) = X(z) \left[ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{c(\omega, \zeta) d\zeta}{(a + ib) X^+(\zeta)(\zeta - z)} + P_{m+\kappa}(\omega, z) \right].$$

又因为

$$\Omega(\omega, \infty) = \Phi_*(\omega, \infty) = \overline{\Phi(\omega, 0)},$$

则可知, $\Omega(\omega, z)$ 在 $\infty$ 处以概率 1 有 0 阶极点(即  $m=0$ ). 从而可得

$$\Omega(\omega, z) = X(z) \left[ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{c(\omega, \zeta) d\zeta}{(a + ib) X^+(\zeta)(\zeta - z)} + P_{\kappa}(\omega, z) \right],$$

其中:  $P_{\kappa}(\omega, z) = C_{\kappa}(\omega) z^{\kappa} + \sum_{n=0}^{\kappa-1} C_n(\omega) z^n$ ,  $C_{\kappa}(\omega), C_n(\omega), n = 0, 1, 2, \dots, \kappa-1$ . 它是与  $z$  无关的关于  $\omega$  的任意复函数,进而有

$$\begin{aligned} \Omega_*(\omega, z) &= z^{\kappa} X(z) \left[ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{c(\omega, \zeta) z d\zeta}{(a + ib) X^+(\zeta) \zeta^{\kappa+1} (\zeta - z)} + \overline{P_{\kappa}(\omega, \frac{1}{z})} \right]. \\ \overline{P_{\kappa}(\omega, \frac{1}{z})} &= \overline{C_{\kappa}(\omega)} \frac{1}{z^{\kappa}} + \sum_{n=0}^{\kappa-1} \overline{C_n(\omega)} \frac{1}{z^n}. \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[ X(z) P_{\kappa}(\omega, z) + z^{\kappa} X(z) \overline{P_{\kappa}(\omega, \frac{1}{z})} \right] = \\ &X(z) \left[ \frac{C_0(\omega) + \overline{C_{\kappa}(\omega)}}{2} + \frac{C_1(\omega) + \overline{C_{\kappa-1}(\omega)}}{2} z + \frac{C_2(\omega) + \overline{C_{\kappa-2}(\omega)}}{2} z^2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. \frac{\overline{C_2(\omega)} + C_{\kappa-2}(\omega)}{2} z^{\kappa-2} + \frac{\overline{C_1(\omega)} + C_{\kappa-1}(\omega)}{2} z^{\kappa-1} + \frac{\overline{C_0(\omega)} + C_{\kappa}(\omega)}{2} z^{\kappa} \right]. \end{aligned}$$

所以,取  $P_{\kappa}(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\kappa} C_n(\omega) z^n$ . 其中:  $C_n(\omega) = \overline{C_{\kappa-n}(\omega)}$ .

由此可得,随机 Hilbert 问题(1)的一般解为

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, z) &= \frac{1}{2}[\Omega(\omega, z) + \Omega_*(\omega, z)] = \left[ \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{c(\omega, \zeta) d\zeta}{(a + ib) X^+(\zeta)(\zeta - z)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{z^{\kappa} X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{c(\omega, \zeta) z d\zeta}{(a + ib) X^+(\zeta) \zeta^{\kappa+1} (\zeta - z)} \right] + X(z) P_{\kappa}(\omega, z), \quad |z| < 1. \end{aligned} \tag{11}$$

(ii) 当  $\kappa < 0$  时, 由文献[2]可知, 当且仅当满足条件

$$\int_L \frac{\zeta^\kappa c(\omega, \zeta) d\zeta}{(a+ib)X^+(\zeta)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -\kappa - 2 \quad (12)$$

时, 随机 Riemann 问题(8)有惟一解, 所以可得

$$\Omega(\omega, z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_L \frac{c(\omega, \zeta) d\zeta}{(a+ib)X^+(\zeta)(\zeta-z)}.$$

此时  $P_\kappa(\omega, z) \equiv 0$ , 随机 Hilbert 问题(1)有惟一解, 即

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, z) &= \frac{1}{2} [\Omega(\omega, z) + \Omega_*(\omega, z)] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{X(z)}{\pi i} \int_L \frac{c(\omega, \zeta) d\zeta}{(a+ib)X^+(\zeta)(\zeta-z)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{z^\kappa X(z)}{\pi i} \int_L \frac{c(\omega, \zeta) z d\zeta}{(a+ib)X^+(\zeta)\zeta^{\kappa+1}(\zeta-z)} \right] = \\ &= \frac{X(z)}{\pi i} \int_L \frac{c(\omega, \zeta) d\zeta}{(a+ib)X^+(\zeta)(\zeta-z)}, \quad |z| < 1. \end{aligned} \quad (13)$$

于是可得如下定理.

**定理 2** 当  $\kappa \geq 0$  时, 随机 Hilbert 问题(1)有一般解, 即式(11); 而当  $\kappa < 0$  时, 当且仅当满足条件(12)时, 问题(1)有唯一解, 即式(13).

#### 参考文献:

- [1] WANG Chuan-rong. Random singular integral of random process with second order moment[J]. Acta Mathematica Scientia, 2005, 25B(2): 376-384.
- [2] WANG Chuan-rong. Random singular integral and its application[M]. New Jersey: World Scientific Publishing Company, 2000: 191-197.
- [3] 林峰. Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数的边界极限[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2004, 25(4): 352-355.
- [4] 武宝亭, 李庆生, 杨跃武. 随机过程与随机微分方程[M]. 北京: 电子工业出版社, 1994.
- [5] 路见可. 解析函数边值问题[M]. 2 版. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.

## Random Hilbert Boundary Value Problem with Second Order Moment

YAO Cun, LIN Feng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** In order to solve the random Hilbert boundary value problem of random process with second order moment, we convert it into random Riemann boundary value problem by the method of symmetrical expansion, and get its solution.

**Keywords:** boundary value problem; Hilbert problem; Riemann problem; second order moment; symmetrical expansion; random process

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)