

文章编号: 1000-5013(2011)06-0710-04

解四阶抛物型方程的两层高精度差分格式

崔晓鹏, 单双荣

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 对任意常数  $a>0$  的四阶抛物型方程, 构造含参数的高精度两层差分格式. 当参数满足一定的条件时, 局部截断误差阶最高可达到  $O(\tau^2+h^6)$ , 并且是绝对稳定的. 特殊情况下, 则为一个条件稳定的两层显格式. 数值例子表明, 稳定性分析是正确的.

**关键词:** 四阶抛物型方程; 差分格式; 高精度; 截断误差; 稳定性

**中图分类号:** O 241.82      **文献标志码:** A

考虑下列四阶抛物方程初边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad a > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} &= u(1, t) = \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

1960 年, Саульев 在文献[1-2]中对四阶抛物型方程(1)中  $a=1$  构造了一个显式差分格式, 其截断误差阶为  $O(\tau+h^2)$ . 另外, 他又提出了两个隐式差分格式, 截断误差阶分别为  $O(\tau^2+h^2)$  和  $O(\tau^2+h^4)$ . 文献[3]给出四阶抛物方程的两层恒稳定隐格式, 截断误差阶为  $O(\tau^2+h^2+(\tau/h)^2)$ . 文献[4-5]用不同方法给出了四阶抛物方程的三层绝对稳定隐式差分格式, 截断误差阶达到  $O(\tau^2+h^6)$ . 文献[6-7]给出了四阶抛物方程的两层高精度绝对稳定差分格式, 当  $a=1$  时, 截断误差阶达到  $O(\tau^2+h^6)$ ; 而当  $a\neq 1$  时, 截断误差不能达到  $O(\tau^2+h^6)$ . 本文对常系数四阶抛物型方程构造了含参数的高精度两层差分格式.

1 差分格式的构造

分别用  $\tau, h$  表示时间  $t$  及空间  $x$  方向的步长. 设  $r=\tau/h^4$  为步长比, 用  $u_j^n$  表示  $u(jh, n\tau)$  的差分逼近. 网域由点集  $(x_j, t_n)$  组成, 其中  $x_j=jh, t_n=n\tau, h=1/M, j=0, 1, 2, \cdots, M; n=0, 1, 2, \cdots$ .

构造两层含参数差分格式为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{1}{h^4} L_x [\theta u_j^{n+1} + (1 - \theta) u_j^n] = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{2}$$

令  $L_x = \delta_x^4 - \frac{1}{6} \delta_x^6 + \frac{7}{240} \delta_x^8$ ,  $\delta_x^4, \delta_x^6, \delta_x^8$  作用于  $u_j$  时, 算子系数如表 1 所示.

表 1 各阶中心差分算子系数  
Tab. 1 Coefficients of the central differences for each order

系数	$j-4$	$j-3$	$j-2$	$j-1$	$j$	$j+1$	$j+2$	$j+3$	$j+4$
$\delta_x^4$	—	—	1	-4	6	-4	1	—	—
$\delta_x^6$	—	1	-6	15	-20	15	-6	1	—
$\delta_x^8$	1	-8	28	-56	70	-56	28	-8	1

式(2)即为

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{1}{h^4} \left\{ \theta \left[ \frac{7}{240} (u_{j-4}^{n+1} + u_{j+4}^{n+1}) - \frac{2}{5} (u_{j-3}^{n+1} + u_{j+3}^{n+1}) + \right. \right. \\ & \left. \frac{169}{60} (u_{j-2}^{n+1} + u_{j+2}^{n+1}) - \frac{122}{15} (u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + \frac{91}{8} u_j^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[ \frac{7}{240} (u_{j-4}^n + u_{j+4}^n) - \right. \\ & \left. \left. \frac{2}{5} (u_{j-3}^n + u_{j+3}^n) + \frac{169}{60} (u_{j-2}^n + u_{j+2}^n) - \frac{122}{15} (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + \frac{91}{8} u_j^n \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

或为

$$\begin{aligned} & ar\theta [7(u_{j-4}^{n+1} + u_{j+4}^{n+1}) - 96(u_{j-3}^{n+1} + u_{j+3}^{n+1}) + 676(u_{j-2}^{n+1} + u_{j+2}^{n+1}) - 1\,952(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})] + \\ & (2\,730ar\theta + 240)u_j^{n+1} + ar(1-\theta) [7(u_{j-4}^n + u_{j+4}^n) - 96(u_{j-3}^n + u_{j+3}^n) + \\ & 676(u_{j-2}^n + u_{j+2}^n) - 1\,952(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)] + [2\,730ar(1-\theta) - 240]u_j^n = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

**特例 1** 当  $\theta=0$  时, 格式(4)为两层显格式. 即有

$$\begin{aligned} & 240u_j^{n+1} + ar [7(u_{j-4}^n + u_{j+4}^n) - 96(u_{j-3}^n + u_{j+3}^n) + 676(u_{j-2}^n + u_{j+2}^n) - \\ & 1\,952(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)] + (2\,730ar - 240)u_j^n = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

**特例 2** 当  $\theta=1/2$  时, 格式(4)为时间方向对称的两层隐格式. 即有

$$\begin{aligned} & ar [7(u_{j-4}^{n+1} + u_{j+4}^{n+1}) - 96(u_{j-3}^{n+1} + u_{j+3}^{n+1}) + 676(u_{j-2}^{n+1} + u_{j+2}^{n+1}) - 1\,952(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})] + \\ & (2\,730ar + 480)u_j^{n+1} + ar [7(u_{j-4}^n + u_{j+4}^n) - 96(u_{j-3}^n + u_{j+3}^n) + 676(u_{j-2}^n + u_{j+2}^n) - \\ & 1\,952(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)] + (2\,730ar - 480)u_j^n = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2 截断误差分析

将格式(2)中各节点上的  $u$  在网格点  $(x_j, t_{n+1/2})$  处展开的 Taylor 级数, 则有

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau^2}{24} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right] u(x_j, t_{n+1/2}) + O(\tau^4), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^4} L_x [\theta u(x_j, t_{n+1}) + (1-\theta)u(x_j, t_n)] = \left[ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{41}{7\,560} h^6 \frac{\partial^{10}}{\partial x^{10}} + \frac{13}{10\,800} h^8 \frac{\partial^{12}}{\partial x^{12}} + \right. \\ & \left. (\theta - \frac{1}{2}) \tau \left( \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} + \frac{41}{7\,560} h^6 \frac{\partial^{11}}{\partial x^{10} \partial t} + \frac{13}{10\,800} h^8 \frac{\partial^{13}}{\partial x^{12} \partial t} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\tau^2}{8} \left( \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial t^2} + \frac{41}{7\,560} h^6 \frac{\partial^{12}}{\partial x^{10} \partial t^2} + \frac{13}{10\,800} h^8 \frac{\partial^{14}}{\partial x^{12} \partial t^2} \right) + \right. \\ & \left. \left( \frac{\theta}{24} - \frac{1}{48} \right) \tau^3 \left( \frac{\partial^7}{\partial x^4 \partial t^3} + \frac{41}{7\,560} h^6 \frac{\partial^{13}}{\partial x^{10} \partial t^3} + \frac{13}{10\,800} h^8 \frac{\partial^{15}}{\partial x^{12} \partial t^3} \right) \right] u(x_j, t_{n+1/2}) + O(\tau^4 + h^{10}). \end{aligned} \quad (8)$$

将式(7), (8)代入式(2), 经整理后可得

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial^4}{\partial x^4} + a(\theta - \frac{1}{2}) \tau \left( \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} + \frac{41}{7\,560} h^6 \frac{\partial^{11}}{\partial x^{10} \partial t} \right) + \right. \\ & \left. \frac{41}{7\,560} a h^6 \frac{\partial^{10}}{\partial x^{10}} + \frac{\tau^2}{24} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + a \frac{\tau^2}{8} \left( \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial t^2} + \frac{41}{7\,560} h^6 \frac{\partial^{12}}{\partial x^{10} \partial t^2} \right) + \right. \\ & \left. a \left( \frac{\theta}{24} - \frac{1}{48} \right) \tau^3 \left( \frac{\partial^7}{\partial x^4 \partial t^3} + \frac{41}{7\,560} h^6 \frac{\partial^{13}}{\partial x^{10} \partial t^3} \right) \right] u(x_j, t_{n+1/2}) + O(\tau^4 + \tau h^8 + h^{10}) = 0, \end{aligned}$$

其截断误差  $R_j^n = a(\theta - \frac{1}{2}) \tau \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} u(x_j, t_{n+1/2}) + O(\tau^2 + h^6)$ .

(1) 当  $0 < \theta \leq 1$  且  $\theta \neq 1/2$  时, 格式(4)为两层隐格式, 截断误差阶为  $O(\tau + h^6)$  阶.

(2) 当  $\theta=0$  时, 格式(5)为两层显格式, 截断误差阶为  $O(\tau + h^6)$  阶.

(3) 当  $\theta=1/2$  时, 格式(6)为两层隐格式, 截断误差阶为  $O(\tau^2 + h^6)$  阶.

## 3 稳定性分析

令  $r = \tau/h^4$ , 则格式(2)变为

$$u_j^{n+1} - u_j^n + arL_x [\theta u_j^{n+1} + (1-\theta)u_j^n] = 0. \quad (9)$$

由 Fourier 方法, 将  $u_j^n = \rho^n \exp(i\beta jh)$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) 代入式(9), 经整理可得

$$\rho - 1 + arA(\theta\rho + 1 - \theta) = 0. \tag{10}$$

式中:  $A = 16\sin^4(\frac{\beta h}{2}) + \frac{32}{3}\sin^6(\frac{\beta h}{2}) + \frac{112}{15}\sin^8(\frac{\beta h}{2})$ . 这里,  $0 \leq A \leq 34\frac{2}{15}$ , 则有

$$\rho = \frac{1 + arA\theta - arA}{1 + arA\theta}.$$

要使  $|\rho| \leq 1$ , 即  $-2 \leq -\frac{arA}{1 + arA\theta} \leq 0$ , 由于  $arA \geq 0$ , 不等式右边恒成立, 故则只要  $-2 \leq -\frac{arA}{1 + arA\theta}$  即可. 即有

$$arA(1 - 2\theta) \leq 2. \tag{11}$$

(1) 当  $1 - 2\theta = 0$ , 即  $\theta = 1/2$  时, 式(11)恒成立, 即格式(4)恒稳定.

(2) 当  $1 - 2\theta < 0$ , 即  $1/2 < \theta \leq 1$  时, 式(11)可化为

$$\frac{2}{aA(1 - 2\theta)} < 0 < r.$$

不等式恒成立, 即格式(4)恒稳定.

(3) 当  $1 - 2\theta > 0$ , 即  $0 \leq \theta < 1/2$  时, 要使  $|\rho| \leq 1$ , 需有

$$r \leq \min\{\frac{5}{aA(1 - 2\theta)}\} \leq \frac{15}{256a(1 - 2\theta)}.$$

即格式(4)条件稳定.

对特例 1(即式(5))为两层显格式, 当  $r \leq 15/256a$  时, 格式(5)条件稳定. 对特例 2 即式(6), 为时间方向对称的两层隐格式, 格式(6)恒稳定.

由以上讨论, 有下述定理.

**定理 1** 当  $0 \leq \theta < 1/2$  且  $r \leq 15/256a$  时, 格式(4)条件稳定.

**定理 2** 当  $1/2 \leq \theta \leq 1$  时, 格式(4)恒稳定.

4 数值例子

考虑下列四阶抛物型初边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{16} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, & t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ u(0, t) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} &= u(\frac{\pi}{2}, t) = \frac{\partial^2 u(\frac{\pi}{2}, t)}{\partial x^2} = 0, & t > 0. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

其精确解  $u(x, t) = \exp(-t) \sin 2x$ .

取  $h = \pi/40$ , 将空间方向 20 等分, 时间步长按  $\tau = rh^4$  进行计算. 初始条件用直接转移法转移, 即  $u_j^0 = \sin 2jh$ , 边界条件处理同文献[6], 用中心差商代替微商.

对于网格函数  $u_0^0, u_1^0, \dots, u_M^0$ , 有  $u_0^n = u_M^n = 0$ . 作如下周期延拓, 即  $u_{-1}^n = -u_1^n, u_{-2}^n = -u_2^n, u_{-3}^n = -u_3^n; u_{M+1}^n = -u_{M-1}^n, u_{M+2}^n = -u_{M-2}^n, u_{M+3}^n = -u_{M-3}^n$ .

对于格式(4)的参数, 分别取  $\theta = 0, \theta = 1/2, \theta = 2/3$ . 当  $\theta = 0$  时, 由定理 1, 2 可知: 两层显格式(5)稳定条件为  $0 < r \leq 15/256a = 15/16$ . 500 步后不同网格比的计算结果, 如表 2, 图 1 所示.

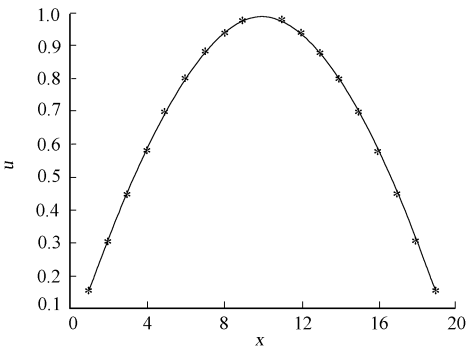


图 1 数值解与精确解比较  
Fig. 1 Compare the numerical solution with ture solution

表 2 格式计算结果比较表  
Tab. 2 Comparing table of the numeral results

$x$	$\theta$	$r=1/2$		$r=15/16$		$r=1$	
		精确解	数值解	精确解	数值解	精确解	数值解
$\frac{\pi}{40}$	0	0.154 953 421	0.154 953 407	0.153 669 014	0.153 668 966	0.153 486 399	857.161 190
	1/2	0.154 953 421	0.154 953 421	0.153 669 014	0.153 669 014	0.153 486 399	0.153 486 399
	2/3	0.154 953 421	0.154 953 426	0.153 669 014	0.153 669 031	0.153 486 399	0.153 486 417
$\frac{\pi}{10}$	0	0.582 220 393	0.582 220 340	0.577 394 376	0.577 394 193	0.576 708 218	−3 219.535 24
	1/2	0.582 220 393	0.582 220 393	0.577 394 376	0.577 394 377	0.576 708 218	0.576 708 219
	2/3	0.582 220 393	0.582 220 411	0.577 394 376	0.577 394 438	0.576 708 218	0.576 708 289
$\frac{7\pi}{40}$	0	0.882 570 916	0.882 570 836	0.875 255 298	0.875 255 020	0.874 215 171	4 882.148 013
	1/2	0.882 570 916	0.882 570 916	0.875 255 298	0.875 255 299	0.874 215 171	0.874 215 173
	2/3	0.882 570 916	0.882 570 943	0.875 255 298	0.875 255 392	0.874 215 171	0.874 215 278
$\frac{\pi}{4}$	0	0.990 532 495	0.990 532 406	0.982 321 985	0.982 321 674	0.981 154 624	−5 477.400 502
	1/2	0.990 532 495	0.990 532 496	0.982 321 985	0.982 321 987	0.981 154 624	0.981 154 625
	2/3	0.990 532 495	0.990 532 526	0.982 321 985	0.982 322 091	0.981 154 624	0.981 154 744

由表格 2 和图 1 可看出:当  $\theta=1/2, \theta=2/3$  时, 对  $r$  取不同值, 其数值解与精确解基本吻合; 当  $\theta=0$  时, 其数值解与精确解在  $r=1/2, r=15/16$  时仍然基本吻合; 而当  $r=1$  时发散. 因此, 计算结果与理论分析一致.

参考文献:

[1] САУЛЬБЕВ В К. 抛物型方程的网格积分法[M]. 袁兆鼎, 译. 北京: 科学出版社, 1963.  
[2] 余德浩, 汤华中. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.  
[3] 金相华, 曾文平. 解四阶抛物型方程的若干新差分格式[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2006, 27(3): 238-240.  
[4] 曾文平. 四阶抛物型方程的一族高精度恒稳差分格式[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2003, 24(3): 245-248.  
[5] 单双荣. 解四阶抛物型方程的高精度差分格式[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2005, 26(1): 19-22.  
[6] 林鹏程. 解四阶抛物型方程的绝对稳定高精度差分格式[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 1994, 33(6): 756-759.  
[7] 曾文平. 高阶抛物型方程的一族高精度恒稳差分格式[J]. 计算数学, 2003, 25(3): 347-354.

High-Accurate and Two-Layer Difference Schemes for  
Solving Four-Order Parabolic Equation  
CUI Xiao-peng, SHAN Shuang-rong

(School of Mathematics, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** A family of high-accurate and two-layer difference schemes with parameters are constructed for solving four-order parabolic equation with arbitrary constant coefficient  $a>0$ . The local truncation error can reach the order of  $O(\tau^2 + h^6)$  as the maximum when the parameters satisfy a certain condition and these difference schemes are absolutely stable. In special case, one-layer conditionally stable difference scheme is obtained. The analysis of stability is correct, as illustrated by numerical example.  
**Keywords:** four-order parabolic equation; difference scheme; high accuracy; truncation error; stability

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中, 张金顺)