第32卷 第6期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 32 No. 6
2011年11月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Nov. 2011

文章编号: 1000-5013(2011)06-0705-05

两类调和函数的拟共形性质

朱剑峰, 黄心中

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 设 $HS(\mu)$ 和 $\Sigma_H(\gamma)$ 分别为定义在单位圆盘 $U=\{|z|<1\}$ 及区域 $\widetilde{U}=\{|z|>1\}$ 上的两类调和函数. 利用 $HS(\mu)$ 的偏差估计,证明 $HS(\mu)$ 为一族双向-Lipschitz 函数类及调和拟共形函数类. 进而,找到 $\Sigma_H(\gamma)$ 类的函数为调和拟共形映照的一个充分条件.

关键词: 调和函数; 拟共形映照; $HS(\mu)$ 函数类; $\Sigma_H(\gamma)$ 函数类

中图分类号: O 174.2 **文献标志码:** A

1 预备知识

设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为定义在区域 D 上具有二阶连续偏导数的函数,如果 $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$,则 $f(z)$ 为 D 上的调和函数.

令 $U=\{|z|<1\}$ 为单位圆盘, $f(z)$ 为定义在 U 上的保向单叶调和函数,由区域 U 的单连通性可知存在 $h(z)$ 和 $g(z)$ 为 U 上的解析函数,使得 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$. 又因为 $f(z)$ 单叶保向,故由 Lewy 定理[1]可知, $f(z)$ 的 Jacobian 恒正,即 $J_f=|h'|^2-|g'|^2>0$. 若进一步存在常数 $0\leqslant k<1$,使得 $|g'/h'|\leqslant k$,则称 $f(z)$ 为 U 上的调和 k-拟共形映照. 关于区域上的调和映照何时成为拟共形映照有许多结论[2-7].

设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 为定义在单位圆盘 U 上的调和函数,且有

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{+\infty}a_n z^n,\qquad g(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n z^n \tag{1}$$

为 U 上的解析函数. 令 $0<\mu<1$,记 $HS(\mu)=\{f\,|\,f(z)|=h(z)+\overline{g(z)}\}$. 其中: $h(z)$, $g(z)$ 由式(1)定义且满足

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-\mu}{1-\mu}(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1|. \tag{2}$$

Öztürk 等[8]证明了定理 A.

定理 A 若 $f(z)\in HS(\mu)$,则 $f(z)$ 为单叶调和函数,且有

$$(1-|b_1|)\left(|z|-\frac{1-\mu^2}{2}|z|^2\right)\leqslant$$

$$|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)|z|+\frac{(1-\mu^2)(1-|b_1|)}{2}|z|^2.$$

研究 $HS(\mu)$ 类函数 $f(z)$ 的偏差估计,可得出当 $0<\mu<1$ 时, $f(z)$ 一定为调和拟共形映照且满足双向 Lipschitz 条件.

令 $\widetilde{U}=\{|z|>1\}$ 为单位圆盘外区域, $f(z)$ 为定义在 $\widetilde{U}$ 上的调和映照,满足 $f(\infty)=\infty$,则 $f(z)$ 可表示成 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}+A\ln|z|$,且有

收稿日期: 2010-10-27

通信作者: 朱剑峰(1980-),男,讲师,主要从事函数论的研究. E-mail: flandy@hqu.edu.cn.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(10QZR22)

$$h(z)=z+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n,\qquad g(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_nz^n.$$

在进一步假设 $f(z)$单叶的条件下,Hengartner 等[9]证明了定理B.

定理B 设 $f(z)$为定义在 $\widetilde{U}$ 上的单叶调和映照,满足 $f(\infty)=\infty$,则 $f(z)$可表示成

$$f(z)=\alpha z+\overline{\beta z}+A\ \ln|z|+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{z^n}+\overline{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{z^n}}.\tag{3}$$

式(3)中:$0\leqslant|\beta|<|\alpha|$,且$|a(z)|=|\overline{f}_{\bar z}/f_z|<1$,对于任意的 $z\in\widetilde{U}$ 都成立.

另一方面,假设 $f(z)$如式(3)所定义,则文献[9]并未涉及 $f(z)$单叶的条件. 针对这个问题,Jahangiri 等[10]证明了对于 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$,且有

$$h(z)=\alpha z+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{z^n},\qquad g(z)=\beta z+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{z^n}\tag{4}$$

为 $\widetilde{U}$ 上的调和函数. 若满足条件 $\sum_{n=1}^{+\infty}n(|a_n|+|b_n|)\leqslant|\alpha|-|\beta|$,则 $f(z)$为单叶调和星像函数[10].

令 $0<\gamma<1$,记 $\Sigma_H(\gamma)=\{f|f(z)|=h(z)+\overline{g(z)}\}$. 其中:$h(z)$,$g(z)$由式(3)定义且满足

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-\gamma}{1-\gamma}(|a_n|+|b_n|)\leqslant|\alpha|-|\beta|.\tag{5}$$

2 主要结论

定理1 若 $f(z)\in HS(\mu)$为单位圆盘U 上的调和函数,则 $f(z)$为 k-拟共形映照. 这里常数 k 与参数 μ 有关.

证明 任取 $z_1,z_2\in U$,且 $z_1\neq z_2$. 利用不等式 $\frac{n-\mu}{1-\mu}>n(n\geqslant2)$,有

$$\begin{aligned}|f(z_1)-f(z_2)|&=|(z_1-z_2)+\sum_{n=2}^{+\infty}a_n(z_1^n-z_2^n)+\overline{\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(z_1^n-z_2^n)}|\geqslant\\&|z_1-z_2|(1-|b_1|-\sum_{n=2}^{+\infty}n(|a_n|+|b_n|)>\\&|z_1-z_2|(1-|b_1|-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-\mu}{1-\mu}(|a_n|+|b_n|))\geqslant\\&|z_1-z_2|[1-|b_1|-(1-|b_1|)]=0.\end{aligned}$$

所以,$f(z)$为单叶调和函数. 由式(2)可知

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n|a_n|\leqslant(1-\mu)(1-|b_1|)+\mu\sum_{n=2}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)-\sum_{n=2}^{+\infty}n|b_n|.$$

利用不等式$(2+\mu-n)/\mu\leqslant1(n\geqslant2)$,可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(n-\mu)(|a_n|+|b_n|)+\\&\frac{\mu}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2+\mu-n}{\mu}(|a_n|+|b_n|)\leqslant\\&\frac{1}{2}(1-\mu)(1-|b_1|)+\frac{\mu}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|).\end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)\leqslant\frac{(1-|b_1|)(1-\mu)}{2-\mu},\tag{6}$$

从而有

$$|a(z)|=\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|=\left|\frac{\sum_{n=1}^{+\infty}nb_nz^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{+\infty}na_nz^{n-1}}\right|\leqslant\frac{|b_1|+\sum_{n=2}^{+\infty}n|b_n|}{1-\sum_{n=2}^{+\infty}n|a_n|}\leqslant$$

$$\frac{|b_1|+\sum_{n=2}^{+\infty}n|b_n|}{1-(1-\mu)(1-|b_1|)-\frac{\mu(1-|b_1|)(1-\mu)}{2-\mu}+\sum_{n=2}^{+\infty}n|b_n|}=$$

$$\frac{|b_1|+\sum_{n=2}^{+\infty}n|b_n|}{|b_1|+\sum_{n=2}^{+\infty}n|b_n|+\mu(1-|b_1|)\frac{1-\mu}{2-\mu}}\leqslant\frac{1}{1+\mu(1-|b_1|)\frac{1-\mu}{2-\mu}}=k<1.$$

所以，$f(z)$为 k-拟共形映照．这里常数 k 与参 μ 有关.

定理 2　若 $f(z)\in HS(\mu)$，则 $f(z)$为双向 Lipschitz 函数，且任取 $z_1,z_2\in U$，则有

$$(1-|b_1|)\frac{\mu}{2-\mu}|z_1-z_2|\leqslant|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant$$

$$\frac{4-3\mu+\mu|b_1|}{2-\mu}|z_1-z_2|.$$

证明　任取 $z_1,z_2\in U$，则有

$$|f(z_1)-f(z_2)|=|(z_1-z_2)+\sum_{n=2}^{+\infty}a_n(z_1^n-z_2^n)+\overline{\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(z_1^n-z_2^n)}|\geqslant$$

$$|z_1-z_2|(1-|b_1|-\sum_{n=2}^{+\infty}n(|a_n|+|b_n|))=$$

$$|z_1-z_2|(1-|b_1|-\sum_{n=2}^{+\infty}(n-\mu)(|a_n|+|b_n|)-\mu\sum_{n=2}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|))\geqslant$$

$$|z_1-z_2|(1-|b_1|-(1-\mu)(1-|b_1|)-\mu\frac{(1-\mu)}{2-\mu}(1-|b_1|))=$$

$$(1-|b_1|)\frac{\mu}{2-\mu}|z_1-z_2|.$$

另一方面，有

$$|f(z_1)-f(z_2)|=|(z_1-z_2)+\sum_{n=2}^{+\infty}a_n(z_1^n-z_2^n)+\overline{\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(z_1^n-z_2^n)}|\leqslant$$

$$|z_1-z_2|(1+|b_1|+\sum_{n=2}^{+\infty}(n-\mu)(|a_n|+|b_n|)+\mu\sum_{n=2}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|))\leqslant$$

$$|z_1-z_2|(1+|b_1|+(1-\mu)(1-|b_1|)+\mu\frac{(1-\mu)}{2-\mu}(1-|b_1|))=$$

$$\frac{4-3\mu+\mu|b_1|)}{2-\mu}|z_1-z_2|.$$

所以，$f(z)$为双向 Lipschitz 函数.

对于 $\Sigma_H(\gamma)$类函数有如下讨论．

定理 3　设 $f(z)\in\Sigma_H(\gamma)$，则 $f(z)$为 $\widetilde{U}$ 上的单叶保向调和函数，若 $f(z)$不是下列变换 $f(z)\neq\alpha z+\frac{a_1}{z}+\overline{\beta z}+\frac{\overline{b}_1}{\overline{z}}$，则 $f(z)$定为 k-拟共形映照．这里常数 k 与参数 γ 有关.

证明　任取 $z_1\neq z_2\in\widetilde{U}$，由式(4)可得

$$f(z_1)-f(z_2)=\alpha(z_1-z_2)+\overline{\beta(z_1-z_2)}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(\frac{z_2^n-z_1^n}{z_1^nz_2^n})+\overline{\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(\frac{z_2^n-z_1^n}{z_1^nz_2^n})},$$

利用$|z_1|>1,|z_2|>1$ 及$\frac{n-\gamma}{1-\gamma}\geqslant n$，有

$$|f(z_1)-f(z_2)|\geqslant|z_1-z_2|(|\alpha|-|\beta|-\frac{1}{|z_1z_2|}\sum_{n=1}^{+\infty}n(|a_n|+|b_n|))\geqslant$$

$$|z_1-z_2|(|\alpha|-|\beta|-\frac{|\alpha|-|\beta|}{|z_1z_2|})=$$

$$|z_1-z_2|(|\alpha|-|\beta|)(1-\frac{1}{|z_1z_2|})>0,$$

所以,$f(z)$是单叶的.

另一方面,由于有

$$J_f=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2\geqslant$$
$$(|h'(z)|+|g'(z)|)(|\alpha|-|\beta|-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(|a_n|+|b_n|)}{|z|^{n+1}})\geqslant$$
$$(|h'(z)|+|g'(z)|)(|\alpha|-|\beta|-\frac{1}{|z|^2}\sum_{n=1}^{+\infty}n(|a_n|+|b_n|))\geqslant$$
$$(|h'(z)|+|g'(z)|)(|\alpha|-|\beta|)(1-\frac{1}{|z|^2})>0.$$

所以,$f(z)$是保向的.

由式(5)可知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n-\gamma)(|a_n|+|b_n|)\leqslant(1-\gamma)(|\alpha|-|\beta|),$$

所以有

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(n-\gamma)(|a_n|+|b_n|)\leqslant(1-\gamma)(|\alpha|-|\beta|-|a_1|-|b_1|).$$

利用不等式$\frac{2+\gamma-n}{\gamma}\leqslant 1$($n\geqslant 2$时),可得

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(n-\gamma)(|a_n|+|b_n|)+$$
$$\frac{\gamma}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2+\gamma-n}{\gamma}(|a_n|+|b_n|)\leqslant$$
$$\frac{1-\gamma}{2}(|\alpha|-|\beta|-|a_1|-|b_1|)+\frac{\gamma}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|),$$

即

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)\leqslant\frac{1-\gamma}{2-\gamma}(|\alpha|-|\beta|-|a_1|-|b_1|). \tag{7}$$

结合式(5),(7)可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n|a_n|\leqslant(1-\gamma)(|\alpha|-|\beta|)+\gamma\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)-\sum_{n=1}^{+\infty}n|b_n|\leqslant$$
$$(1-\gamma)(|\alpha|-|\beta|)-\sum_{n=1}^{+\infty}n|b_n|+\gamma(|a_1|+|b_1|)+\gamma\frac{1-\gamma}{2-\gamma}(|\alpha|-|\beta|-|a_1|-|b_1|)=$$
$$\frac{2(1-\gamma)}{2-\gamma}(|\alpha|-|\beta|)+\frac{\gamma}{2-\gamma}(|a_1|+|b_1|)-\sum_{n=1}^{+\infty}n|b_n|.$$

于是有

$$|a(z)|=\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|}\leqslant\frac{|\beta|+\sum_{n=1}^{+\infty}n|b_n|}{|\alpha|-\sum_{n=1}^{+\infty}n|a_n|}\leqslant$$
$$\frac{|\beta|+\sum_{n=1}^{+\infty}n|b_n|}{|\alpha|+\sum_{n=1}^{+\infty}n|b_n|-\frac{2(1-\gamma)}{2-\gamma}(|\alpha|-|\beta|)-\frac{\gamma}{2-\gamma}(|a_1|+|b_1|)}=$$
$$\frac{|\beta|+\sum_{n=1}^{+\infty}n|b_n|}{|\beta|+\sum_{n=1}^{+\infty}n|b_n|+\frac{\gamma}{2-\gamma}(|\alpha|-|\beta|-|a_1|-|b_1|)}\leqslant$$

$$\frac{|\alpha|}{|\alpha|+\frac{\gamma}{2-\gamma}(|\alpha|-|\beta|-|a_1|-|b_1|)}=k.$$

因为 $f(z)\neq\alpha z+a_1/z+\overline{\beta z}+\bar{b}_1/\bar{z}$，所以由式(4)，(5)可知，此时系数 $a_2,a_3,\cdots$ 及 $b_2,b_3,\cdots$ 不全为零．于是有 $|\alpha|-|\beta|-|a_1|-|b_1|>0$，即 $k<1$．此时，$f(z)$ 为 k-拟共形映照．这里，常数 k 与参数 γ 有关．

参考文献：

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jocobian in certain one-to-one mappings[J]. Uspekhi Mat Nauk，1948，3(2)：216-219.

[2] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk[J]. Ann Acad Sci Fenn Math，2002，27：365-372.

[3] PARTYKA D，SAKAN K. On bi-Lipschitz type inequalitites for quasiconformal harmonic mappings[J]. Ann Acad Sci Fenn Math，2007，32：579-594.

[4] 黄心中．单位圆盘上的调和拟共形同胚[J]．数学年刊，2008，29A(4)：519-524.

[5] KALAJ D，PAVLOVIC M. Boundary correspondence under quasiconformal harmonic diffeomorphisms of a half-plane[J]. Ann Acad Sci Fenn Math，2005，30：159-165.

[6] KALAJ D. Quasiconformal harmonic functions between convex domains[J]. Publ Inst Math Nouv Ser，2004，76(90)：3-20.

[7] 朱剑峰，单位圆上调和拟共形映照的复特征估计[J]．华侨大学学报：自然科学版，2010，31(4)：476-479.

[8] ÖZTRL M，YALCIN S. On univalent harmonic functions[J]. Journal of inequalities in pure and applies mathematics，2002，32(4)：1-8.

[9] HENGARTNER W，SCHOBER G. Univalent harmonic functions[J]. Transaction of the Amercian Mathematical Society，1987，299(1)：1-31.

[10] JAHANGIRI M，SILVERMAN H. Meromorphic univalent harmonic functions with negative coefficients[J]. Bull Korean Math Soc，1999，36(4)：763-770.

[11] DUREN P. Harmonic mappings in the plane[M]. Kamblidge：Cambridge University Press，2004.

Quasi-Conformality for Two Classes of Harmonic Functions

ZHU Jian-feng，HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract： Let $HS(\mu)$ and $\Sigma_H(\gamma)$ be two classes of harmonic functions，each are defined in the unit disk $U=\{|z|<1\}$ and the domain $\widetilde{U}=\{|z|>1\}$. In this paper，by using distortion estimate for $HS(\mu)$，we prove $HS(\mu)$ is a class of bi-Lipschitz function and harmonic quasiconformal mapping. Moreover，we also find a sufficient condition about the function for $\Sigma_H(\gamma)$ to be a harmonic quasiconformal mapping.

Keywords： harmonic mapping；quasi-conformal mapping；$HS(\mu)$ function；$\Sigma_H(\gamma)$ function

（**责任编辑**：黄晓楠　　**英文审校**：张金顺，黄心中）