第 32 卷　第 6 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 32　No. 6
2011 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2011

文章编号: 1000-5013(2011)06-0699-06

一类四阶微分方程积分边值问题正解的存在性

邹黄辉，王全义

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要: 利用锥压缩锥拉伸不动点定理及一些分析技巧，建立一类四阶非线性微分方程的积分边值问题存在一个及多个正解的充分条件，推广和改进 ZHANG Xue-mei 等人的研究结果.

关键词: 锥；正解；积分边值问题；微分方程；不动点理论

中图分类号: O 175.8　　**文献标志码:** A

由于微分方程的边值问题具有广泛的应用背景，如热传导、等离子物理、化学工程和流体力学等方面中的一些实际问题都与边值问题有关．因此，近年来，微分方程的边值问题受到许多学者的广泛关注，并取得了不少的成果[1-12]．对于边值问题

$$\left.\begin{aligned} &x^{(4)}(t)=\omega(t)f(t,x(t),x''(t)), && 0<t<1,\\ &x(0)=\int_0^1 g(s)x(s)\mathrm{d}s, && x(1)=k_1x(0),\\ &x''(0)=\int_0^1 h(s)x''(s)\mathrm{d}s, && x''(1)=k_2x''(0)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

的正解存在性问题．其中：$k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0$. 文献[1]研究了 $k_1=0,k_2=0$ 时的边值问题(1)；文献[6]研究了 $k_1=1,k_2=1$，$f(t,x(t),x''(t))=f(t,x(t))$ 时的边值问题(1)；文献[7-10]讨论 $g(s)=0,h(s)=0$ 时的边值问题(1)．本文利用锥压缩锥拉伸不动点定理及一些分析技巧，建立了边值问题(1)存在一个及多个正解的一些充分条件.

1　预备知识及引理

假设以下条件成立：

(H_1) $\omega\in C((0,1),[0,+\infty))$，且满足 $0<\int_0^1\omega(s)\mathrm{d}s<+\infty$；

(H_2) $f\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times(-\infty,0],[0,+\infty))$；

(H_3) $g,h\in L^1[0,1]$是非负函数且使得 $U\in[0,1)$，$V\in[0,1)$，其中 $U=\int_0^1(1-v+k_1v)g(v)\mathrm{d}v$，$V=\int_0^1(1-v+k_2v)h(v)\mathrm{d}v$.

设 X 是 Banach 空间，$K\subset X$ 非空，且满足：(1) 对任意 $u,v\geqslant 0$，任意 $x,y\in K$，有 $ux+vy\in K$；(2) 若 $x\in K$，$-x\in K$，有 $x=0$. 那么称 K 为 X 中的一个锥. 记 $J=[0,1]$，空间 $E=C^2[0,1]$.

在空间 E 中定义范数 $\|x\|_2=\|x\|+\|x''\|$，其中 $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$，$\|x''\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x''(t)|$. 则 E 在此范数 $\|x\|_2$ 下成为一个 Banach 空间.

设 K 是 E 中的一个锥，记 $K_r=\{x\in K:\|x\|_2\leqslant r\}$，$\partial K_r=\{x\in K:\|x\|_2\leqslant r\}$，$\overline{K}_{r,R}=\{x\in K:r\leqslant\|x\|_2\leqslant R\}$. 其中：$0<r<R$.

收稿日期: 2011-01-14

通信作者: 王全义(1955-)，男，教授，主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail: qywang@hqu.edu.cn.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

引理 1[13]　(锥压缩锥拉伸不动点定理)设 X 是 Banach 空间,P 是 X 中的一个锥,Ω_1 和 Ω_2 是 X 中的开集,且 $0\in\Omega_1$,$\bar{\Omega}_1\in\Omega_2$,$T:P\cap\bar{\Omega}_2/\Omega_1\to P$ 是全连续算子,如果下列条件之一满足:

(1)若 $x\in P\cap\partial\Omega_1$,则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$;若 $x\in P\cap\partial\Omega_2$,则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$;

(2)若 $x\in P\cap\partial\Omega_1$,则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$;若 $x\in P\cap\partial\Omega_2$,则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$. 则算子 T 在 $P\cap(\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$中有不动点.

引理 2　假设(H_3)成立,以及 $y\in C(0,1)\cap L^1[0,1]$,则边值问题

$$\left.\begin{aligned}&-x''(t)=y(t),\qquad t\in(0,1),\\&x(0)=\int_0^1 g(s)x(s)\mathrm{d}s,\qquad x(1)=k_1x(0),\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

有一个如下的解,即

$$x(t)=\int_0^1 H_1(t,s)y(s)\mathrm{d}s,\tag{3}$$

$$H_1(t,s)=G(t,s)+\frac{1-t+k_1t}{1-U}\int_0^1 G(s,v)g(v)\mathrm{d}v,\tag{4}$$

$$G(t,s)=\begin{cases}t(1-s),&0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ s(1-t),&0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}\tag{5}$$

命题 1　如果 $U\in[0,1)$,显然当 $t,s\in(0,1)$,$H(t,s)>0$,$G(t,s)>0$;当 $H(t,s)\geqslant 0$,$G(t,s)\geqslant 0t$,$s\in[0,1]$.

命题 2　当 $t,s\in[0,1]$时,则有 $G(t,s)\leqslant G(t,t)$,$G(t,s)\leqslant G(s,s)$,$G(t,s)\geqslant\min\{t,1-t\}\min\{s,1-s\}\geqslant\min\{t,1-t\}s(1-s)=\min\{t,1-t\}G(s,s)$.

命题 3　$\min\{t,1-t\}\leqslant 1-t\leqslant 1-t+k_1t\leqslant\max\{1,k_1\}$,$t\in J$,$k_1\geqslant 0$.

命题 4　如果 $U\in[0,1)$,则当 $t,s\in[0,1]$,有

$$\begin{aligned}&\min\{t,1-t\}\left[G(s,s)+\frac{1}{1-U}\int_0^1 G(s,v)g(v)\mathrm{d}v\right]\leqslant H_1(t,s)\leqslant\\&G(s,s)\left[1+\frac{\max\{1,k_1\}}{1-U}\int_0^1 g(v)t\mathrm{d}v\right]\leqslant\frac{1}{4}\left[1+\frac{\max\{1,k_1\}}{1-U}\int_0^1 g(v)t\mathrm{d}v\right]=:\eta_1.\end{aligned}\tag{6}$$

为了应用引理 1,在 $E=C^2[0,1]$中定义如下的一个锥,即

$$\begin{aligned}K=\{&x\in C^2[0,1]:x\geqslant 0,x''\leqslant 0,x(t)\geqslant\\&\frac{\min\{t,1-t\}}{\max\{1,k_1\}}\|x\|,x''(t)\leqslant\frac{-\min\{t,1-t\}}{\max\{1,k_2\}}\|x''\|\}.\end{aligned}\tag{7}$$

由此容易得到

$$|x(t)|+|x''(t)|\geqslant[\max\{1,k_1,k_2\}]^{-1}\min\{t,1-t\}\|x\|_2,\qquad t\in[0,1],\quad x\in K.\tag{8}$$

下面定义一个算子 $T:K\to C^2[0,1]$为

$$(Tx)(t)=\int_0^1\int_0^1 H_1(t,\tau)H_2(\tau,s)\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\qquad x\in K.\tag{9}$$

其中,$H_1(t,\tau)$由式(4)给出,即有

$$H_2(\tau,s)=G(\tau,s)+\frac{1-\tau+k_2\tau}{1-V}\int_0^1 G(s,v)h(v)\mathrm{d}v.\tag{10}$$

由 $H_1(t,s)$及 $H_2(\tau,s)$的表达式及命题 4 的证明,可得

命题 5　如果 $V\in[0,1)$,则当 $\tau,s\in[0,1]$时,有 $H_2(\tau,s)\geqslant 0$ 且

$$\begin{aligned}&\min\{\tau,1-\tau\}\left[G(s,s)+\frac{1}{1-V}\int_0^1 G(s,v)h(v)\mathrm{d}v\right]\leqslant H_2(\tau,s)\leqslant\\&\frac{1}{4}+\frac{\max\{1,k_2\}}{1-V}\int_0^1 G(v,v)h(v)\mathrm{d}v=:\eta_2.\end{aligned}\tag{11}$$

记

$$H(t,s)=\int_0^1 H_1(t,\tau)H_2(\tau,s)\mathrm{d}\,\tau.\tag{12}$$

命题 6　如果条件(H_3)成立,则有 $H(t,s)>0$;$t,s\in(0,1)$,即有

$$0 \leqslant H(t,s) \leqslant \frac{1}{6}\left[1+\frac{\max\{1,k_1\}}{1-U}\int_0^1 g(v)\mathrm{d}v\right]\times$$
$$\left[\frac{1}{4}+\frac{\max\{1,k_2\}}{1-V}\int_0^1 v(1-v)g(v)\mathrm{d}v\right]=:\eta, \qquad t,s\in[0,1]. \tag{13}$$

从引理 1 及式(9)可得如下引理.

引理 3　假设条件(H_1)～(H_3) 成立，如果 $x(t)\in C^2[0,1]\cap K$ 是积分微分方程

$$x(t)=(Tx)(t)=\int_0^1\int_0^1 H_1(t,\tau)H_2(\tau,s)\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}\,\tau\mathrm{d}s \tag{14}$$

的解，那么，$x(t)\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)$，且 $x(t)$是问题(1)的一个解.

引理 4　假设条件(H_1)～(H_3) 成立，那么 $T(K)\subset K$，而且 $T:K\to K$ 是全连续的.

2　主要结果

记 $f^{\beta}=\lim\limits_{|x|+|y|\to\beta}\sup\max\limits_{t\in J}\dfrac{f(t,x,y)}{|x|+|y|}$，$f_{\beta}=\lim\limits_{|x|+|y|\to\beta}\inf\min\limits_{t\in J}\dfrac{f(t,x,y)}{|x|+|y|}$，以及

$$\Delta_1(k_1,k_2)=\int_{\delta}^{1-\delta}[\max\{1,k_1,k_2\}]^{-1}\min\{s,1-s\}H_2(\frac{1}{2},s)\omega(s)\mathrm{d}s, \qquad \delta\in(0,\frac{1}{2}),$$

$$\Delta_2(k_2)=\delta^2\int_{\delta}^{1-\delta}H_2(\frac{1}{2},s)\omega(s)\mathrm{d}s, \qquad \delta\in(0,\frac{1}{2}),$$

$$\nabla_1(k_1,k_2)=(\eta+\eta_2)\int_0^1\omega(s)\mathrm{d}s,$$

$$\nabla_2=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\,\frac{1+\int_0^1 sg(s)\mathrm{d}s}{1-\int_0^1(1-s)g(s)\mathrm{d}s}+1\right]\times\frac{1+\int_0^1 sh(s)\mathrm{d}s}{1-\int_0^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s}\int_0^1\omega(s)\mathrm{d}s.$$

定理 1　假设条件(H_1)～(H_3)成立. 如果$\nabla_1(k_1,k_2)f^0<1<\Delta_1(k_1,k_2)f_{\infty}$，则问题(1)至少有一个正解.

证明　首先，由式(9)定义算子 $T:K\to C^2[0,1]$和引理 4 可知，$T:K\to K$ 是全连续的. 其次，由式(8)及命题 6 可得

$$\|Tx\|\leqslant\int_0^1\eta\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s. \tag{15}$$

又由命题 5 可得

$$\|(Tx)''\|\leqslant\eta_2\int_0^1\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s. \tag{16}$$

因为$\nabla_1(k_1,k_2)f^0<1$，故存在 $\varepsilon_1>0$，使得$\nabla_1(k_1,k_2)(f^0+\varepsilon_1)<1$. 对此 $\varepsilon_1>0$，存在 $r_1>0$，当 $t\in J$，$(x,y)\in\{(x,y):0<|x|+|y|\leqslant r_1\}$时，就有 $f(t,x,y)\leqslant(f^0+\varepsilon_1)(|x|+|y|)$. 所以，当 $t\in J$，$x\in\partial K_{r_1}$ 时，由式(15)，(16)可得

$$\|(Tx)\|+\|(Tx)''\|\leqslant\int_0^1\eta\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s+\int_0^1\eta_2\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$(f^0+\varepsilon_1)\int_0^1(\eta+\eta_2)\omega(s)(|x(s)|+|x''(s)|)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$(f^0+\varepsilon_1)\nabla_1(k_1,k_2)\cdot\|x\|_2\leqslant\|x\|_2$$

即有

$$\|Tx\|_2\leqslant\|x\|_2.$$

又由于 $\Delta_1(k_1,k_2)f_{\infty}>1$，故存在 $\varepsilon_2>0$，使得 $\Delta_1(k_1,k_2)(f_{\infty}-\varepsilon_2)>1$. 对此 $\varepsilon_2>0$，存在 $r_{22}>0$，当 $t\in J$，$|x|+|y|\geqslant r_{22}$时，就有 $f(t,x,y)\geqslant(f_{\infty}-\varepsilon_2)(|x|+|y|)$.

记 $r_2=\max\{\delta^{-1}r_{22}\max\{1,k_1,k_2\},r_1+1\}$. 从而当 $x\in K_{r_2}$ 时，可得

$$\|Tx\|_2\geqslant|(Tx)''(1/2)|\geqslant$$
$$\int_0^1 H_2(1/2,s)\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s\geqslant\int_{\delta}^{1-\delta}H_2(1/2,s)\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\int_{\delta}^{1-\delta} H_2(1/2,s)\omega(s)(f_\infty - \varepsilon_2)(|x(s)|+|x''(s)|)\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_{\delta}^{1-\delta} H_2(1/2,s)\omega(s)(f_\infty - \varepsilon_2)[\max\{1,k_1,k_2\}]^{-1}\min\{s,1-s\}\mathrm{d}s \,\|x\|_2 \geqslant \|x\|_2.$$

再由引理4可知算子 $T: K\cap(\overline{K}_{r_2}/K_{r_1})\to K$ 满足引理1中的所有条件. 因此,由引理1可知 T 有一个不动点 $x^0\in\overline{K}_{r_1,r_2}$, $r_1\leqslant\|x^0\|\leqslant r_2$ 且 $x(t)\geqslant\min\{t,1-t\}\|x\|$, $t\in J$. 由引理2可知,问题(1)有一个正解 x^0. 定理1证毕.

推论1 设条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$成立,其中 $k_1=0$, $k_2=0$, 且假设 $\nabla_2 f_0<1<\Delta_2(0)f_\infty$. 则在 $k_1=k_2=0$ 的情况下,问题(1)至少有一个正解.

证明 当 $k_1=0$, $k_2=0$ 时,由式(10),(13)可得

$$\nabla_1(0,0) < \nabla_2.$$

又因为

$$\Delta_1(0,0) = \int_{\delta}^{1-\delta}\min\{s,1-s\}H_2(1/2,s)\omega(s)\mathrm{d}s \geqslant \int_{\delta}^{1-\delta}\delta H_2(1/2,s)\omega(s)\mathrm{d}s,$$

即 $\delta\Delta_1(0,0)\geqslant\Delta_2(0)$,因此可得 $\Delta_1(0,0)>2\Delta_2(0)>\Delta_2(0)$.

从 $\nabla_2 f^0<1<\Delta_2(0)f_\infty$ 可得,当 $k_1=k_2=0$ 时,有 $\nabla_1(0,0)f^0<1<\Delta_1(0,0)f_\infty$. 故由定理1得此推论的结论成立. 证毕.

注1 推论1即是文[1]中的定理1,因此定理1比文[1]中的定理1的应用范围更广范且条件更弱.

定理2 假设条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$成立. 如果 $\nabla_1(k_1,k_2)f^\infty<1<\Delta_1(k_1,k_2)f_0$,则问题(1)至少有一个正解.

证明 已得 $T: K\to K$ 是全连续的. 又因 $\Delta_1(k_1,k_2)f_0>1$, 故存在 $\varepsilon_3>0$,使 $\Delta_1(k_1,k_2)(f_0-\varepsilon_3)>1$. 对此 $\varepsilon_3>0$,则存在 $r_3>0$,当 $t\in J$, $(x,y)\in\{(x,y): 0<|x|+|y|\leqslant r_3\}$时,就有 $f(t,x,y)\geqslant(f_0-\varepsilon_3)(|x|+|y|)$. 所以,当 $t\in J$, $x\in\partial K_{r_3}$,从而由式(8)可得

$$\|Tx\|_2 = \|Tx\| + \|(Tx)''\| \geqslant |(Tx)''(1/2)| =$$

$$\left|-\int_0^1 H_2(1/2,s)\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s\right| \geqslant$$

$$(f_0-\varepsilon_3)\int_0^1 H_2(1/2,s)\omega(s)(|x(s)|+|(x''(s)|)\mathrm{d}s \geqslant$$

$$(f_0-\varepsilon_3)\int_{\delta}^{1-\delta} H_2(1/2,s)\omega(s)[\max\{1,k_1,k_2\}]^{-1}\min\{s,1-s\}\mathrm{d}s\,\|x\|_2 =$$

$$(f_0-\varepsilon_3)\Delta_1(k_1,k_2)\|x\|_2 \geqslant \|x\|_2.$$

又由于 $\nabla_1(k_1,k_2)f^\infty<1$, 故存在 $\varepsilon_4>0$, 使得 $\nabla_1(k_1,k_2)(f^\infty+\varepsilon_4)<1$. 对此 $\varepsilon_4>0$,存在 $r_{44}>0$,当 $t\in J$, $|x|+|y|\geqslant r_{44}$时,就有 $f(t,x,y)\leqslant(f_0+\varepsilon_4)(|x|+|y|)$.

记 $M=\max\limits_{0\leqslant|x|+|y|\leqslant r_{44},t\in J} f(t,x,y)$,则对于 $\forall t\in J$, $x\in R^+$, $y\in R^-$,有 $0\leqslant f(t,x,y)\leqslant(f_0+\varepsilon_4)(|x|+|y|)+M$. 记 $r_4=\max\{r_{44},r_3,M\nabla_1(k_1,k_2)(1-\nabla_1(k_1,k_2)(f^\infty+\varepsilon_4))^{-1}\}$. 则当 $t\in J$, $x\in\partial K_{r_4}$ 时,由式(15),(16)可得

$$\|Tx\| + \|(Tx)''\| \leqslant \int_0^1 \eta\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s + \int_0^1 \eta_2\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_0^1(\eta+\eta_2)\omega(s)[(|x(s)|+|x''(s)|)(f^\infty+\varepsilon_4)+M]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$(f^\infty+\varepsilon_4)\int_0^1(\eta+\eta_2)\omega(s)\mathrm{d}s\,\|x\|_2 + M\nabla_1(k_1,k_2) \leqslant$$

$$\nabla_1(k_1,k_2)(f^\infty+\varepsilon_4)r_4 + r_4(1-\nabla_1(k_1,k_2)(f^\infty+\varepsilon_4)) = r_4 = \|x\|_2.$$

再由引理4可知,算子 $T: K\cap(\overline{K}_{r_3}/K_{r_4})\to K$ 满足引理1中的所有条件. 由引理1可知 T 有一个不动点 $x^0\in\overline{K}_{r_3,r_4}$, $r_3\leqslant\|x^0\|\leqslant r_4$ 且 $x(t)\geqslant\min\{t,1-t\}\|x\|$, $t\in J$. 因此,由引理2可知,问题(1)有一个正解 x^0. 定理2证毕.

推论 2　假设条件(H_1)～(H_3)成立,其中 $k_1=0,k_2=0$,且假设 $\nabla_0 f^{\infty}<1<\Delta_2(0)f_0$,则在 $k_1=0=k_2=0$ 的情况下的问题(1)至少有一个正解.

证明　已证 $\nabla_1(0,0)<\nabla_2,\Delta_1(0,0)>\nabla_2(0)$；又由 $\nabla_2 f^{\infty}<1<\Delta_2(0)f_0$，可得 $\nabla_1(0,0)f^{\infty}<1<\Delta_1(0,0)f_0$.

由定理 2 即得推论 1. 证毕.

注 2　推论 2 即是文[1]中的定理 2.

定理 3　假设条件(H_1)～(H_3)成立. 并且满足下列条件：

(H_4) $\Delta_1(k_1,k_2)f_{\infty}>1,\Delta_1(k_1,k_2)f_0>1$；

(H_5) 存在 $b>0$,使得 $M_3=\max\{f(t,x,y):t\in J,|x|+|y|\leqslant b\}<[\nabla(k_1,k_2)]^{-1}b$. 那么,问题(1)至少有两个正解.

证明　因为 $\Delta_1(k_1,k_2)f_0>1$，由定理 2 的证明可知，存在 $0>r_5>b$，使得 $\|Tx\|_2\geqslant\|x\|_2$,其中 $x\in K_{r_5}$，$\|x\|_2=r_5$

又由于 $\Delta_1(k_1,k_2)f_{\infty}>1$,由定理 1 的证明可知,存在 $r_6>b$,使得 $\|Tx\|_2\geqslant\|x\|_2$,其中 $x\in K_{r_6}$，$\|x\|_2=r_6$. 又由条件(H_5)得,当 $x\in\partial K_b$,有

$$\|Tx\|+\|(Tx)''\|\leqslant\int_0^1\eta\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s+\int_0^1\eta_2\omega(s)f(s,x(s),x''(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$(\eta_2+\eta)\int_0^1 M_3\omega(s)\mathrm{d}s\leqslant M_3\nabla(k_1,k_2)<b=\|x\|_2.$$

即得 $x\in\partial K_b$ 时,有 $\|Tx\|_2<b=\|x\|_2$.

再由引理 4 可知,算子 $T:K\cap(\overline{K}_b/K_{r_5})\to K$ 及 $T:K\cap(\overline{K}_{r_6}/K_b)\to K$ 满足引理 1 中的所有条件. 由引理 1 可知 T 有一个不动点 $x^0\in\overline{K}_{r_5,b}$，$r_5\leqslant\|x^0\|\leqslant b$,又有一个不动点 $x^*\in\overline{K}_{b,r_6}$，$b\leqslant\|x^*\|\leqslant r_6$. 又由 $\|Tx\|_2<b=\|x\|_2$,可知 $\|x^0\|\neq b$，$\|x^*\|\neq b$. 因此,由引理 2 可知问题(1)至少有两个正解. 定理 3 证毕.

3　例子

考虑以下四阶边值问题

$$x^{(4)}(t)=\omega(t)f(t,x(t),x''(t)),\qquad 0<t<1,$$

$$x(0)=\int_0^1 g(s)x(s)\mathrm{d}s,\qquad x(1)=k_1x(0),$$

$$x''(0)=\int_0^1 h(s)x''(s)\mathrm{d}s,\qquad x''(1)=k_2x''(0).$$

其中：$k_2=k_1=0$，$f(t,x,y)=(1+\sin\frac{\pi}{2}t)(|x|+|y|)+30|\sin(|x|+|y|)|$，$\omega(t)=2t^2$，$g(t)=t$，$h(t)=2t$. 经计算得 $U=\int_0^1(1-s)g(s)\mathrm{d}s=\int_0^1(1-s)s\mathrm{d}s=\frac{1}{6}$,$V=\int_0^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s=2\int_0^1(1-s)s\mathrm{d}s=\frac{1}{3}$，$\nabla_1(0,0)=0.422\ 2$,$\nabla_2=0.583\ 3$,$\Delta_1(0,0)=0.034\ 6$,

在此例中,关于 $\Delta_2(0)$的不等式对于任意的 $\delta\in(0,1/2)$都是成立的,即

$$\Delta_2(0)=\delta^2\int_{\delta}^{1-\delta}H_2(1/2,s)\omega(s)\mathrm{d}s=\delta^2\left[\left(\frac{3}{8}s^4-\frac{1}{12}s^6\right)\Big|_{\delta}^{0.5}+\left(\frac{1}{3}s^3-\frac{1}{8}s^4-\frac{1}{12}s^6\right)\Big|_{0.5}^{1-\delta}\right]<$$

$$\delta^2\left(\frac{3}{8}s^4\right)\Big|_{\delta}^{0.5}+\delta^2\left(\frac{1}{3}s^3\right)\Big|_{0.5}^{1-\delta}=\frac{3}{8}\delta^2(0.5^4-\delta^4)+\frac{1}{3}\delta^2((1-\delta)^3-0.5^3)<$$

$$\delta^2\left(\frac{1}{3}(1-\delta)^3\right)\leqslant\frac{36}{3\ 125},$$

$$f^{\infty}=2,\qquad f_0=31.$$

显然,有 $\nabla_1(0,0)f^{\infty}<1<\Delta_1(0,0)f_0$,故由定理 2 可得该问题至少有一个正解. 但由于 $\nabla_2 f^{\infty}>1$，$\Delta_2(0)f_0<1$,即 $\nabla_2 f^{\infty}<1<\Delta_2(0)f_0$ 不成立,故文献[1]中的定理 2 得不到该结论.

参考文献:

[1] ZHANG Xue-mei, GE Wei-gao. Positive solutions for a class of boundary-value problems with integral boundary conditions[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 58(2): 203-215.

[2] EDSON A, TO F M, MAURICIO L P. Monotone positive solutions for a fourth order equation with nonlinear boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(9): 3834-3481.

[3] CUI Yu-jun, ZOU Yu-mei. Existence and uniqueness theorems for fourth-order singular boundary value problems [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 58(7): 1449-1456.

[4] 刘进生,张福伟,王淑丽,等.四阶方程两点边值问题变号解的存在性[J].应用泛函分析学报,2007,9(4):366-370.

[5] 张兴秋.奇异四阶积分边值问题正解存在唯一性[J].应用数学学报,2010,33(1):38-50.

[6] MA Hui-li. Symmetric positive solutions for nonlocal boundary value problems of fourth order[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 68(3): 645-651.

[7] MA Ru-yun, XU Jia. Bifurcation from interval and positive solutions of a nonlinear fourth-order boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 72(1): 113-121.

[8] MA Ru-yun. Existence of positive solutions of a fourth-order boundary value problem[J]. Appl Math Compute, 2005, 168: 1219-1231.

[9] GUPTA C P. Existence and uniqueness theorem for the bending of an elastic beam equation[J]. Appl Anal, 1988, 26 (4): 289-304.

[10] LIU B. Positive solutions of fourth-order two point boundary value problems[J]. Appl Math Compute, 2004, 148: 407-420.

[11] ZHAO Z. A necessary and sufficient condition for the existence of positive solutions of singular boundary value problems[J]. Appl Math Compute, 2005, 168: 1219-1231.

[12] 曹君燕,王全义.一类二阶微分方程两点边值问题的正解的存在[J].华侨大学学报:自然科学版,2010,31(1):113-117.

[13] 郭大均.非线性范函分析[M].济南:山东科学技术出版社,2002:286-330.

Existence of Positive Solutions for a Class of Fourth-Order Differential Equations with Integral Boundary Value Problem

ZOU Huang-hui, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: By employing the cone compression and the extension fixed point theorem and some analytical skills, we establish the sufficient conditions for the existence of one and multiple positive solutions for nonlinear boundary-value problems of fourth-order differential equations with integral boundary conditions, our results generalize and improve ZHANG Xuemei et al′s results.

Keywords: cone; positive solutions; integral boundary value problem; differential equations; fixed point theorem

(**责任编辑**: 黄晓楠 **英文审校**: 张金顺, 黄心中)