

文章编号: 1000-5013(2011)05-0597-04

\mathcal{B} -统计收敛与收敛的关系

施慧华

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用 \mathcal{B} -统计收敛说明统计收敛、 \mathbf{A} -统计收敛、缺项统计收敛、 λ -统计收敛及强统计收敛分别是 \mathcal{B} -统计收敛的特殊形式,并分别给予测度刻画. 考察 \mathcal{B} -统计收敛与一般序列收敛之间的关系,得到统计收敛、 λ -统计收敛及强统计收敛与收敛之间的等价描述.

关键词: \mathcal{B} -统计收敛; 收敛; 统计测度; Banach 空间

中图分类号: O 189.13

文献标志码: A

自 1951 年 Fast^[1]引入统计收敛的定义后,统计收敛得到了许多形式的推广,比如 \mathbf{A} -统计收敛、缺项统计收敛、一致统计收敛和 λ -统计收敛等.程立新等^[2]提出了统计测度的概念,建立了相应的测度理论等价刻画统计收敛,实现每一类统计收敛都可以在统计测度的意义下得到统一.此外,程立新等^[3]进一步介绍了一些典型统计收敛恰好是相对于 Ψ 中的一类特殊统计测度的测度收敛,使得各种各样的统计收敛在这种测度理论下得到完美的统一.本文进一步考察 \mathcal{B} -统计收敛与收敛之间的关系.

1 \mathcal{B} -统计收敛下的统一表示

记 \mathbf{N} 为自然数全体,对于任意的 $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{N}$,用 $A^\#$ 表示 \mathbf{A} 的基数.对于 Banach 空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 及其 $x \in X$,记 $\mathbf{A}(\epsilon) = \{n \in \mathbf{N} : \|x_n - x\| \geq \epsilon\}$.

定义 1 (1) 称序列 $\{x_n\}$ \mathbf{A} -统计收敛到 $x \in X$,若对于 $\forall \epsilon > 0$,有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathbf{A}(\epsilon)} a_{i,j} = 0.$$

其中: $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{\mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ 是一个正则可和矩阵,且对任意的 $i \in \mathbf{N}$,有 $a_{i,j} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = 1$.

(2) 称序列 $\{x_n\}$ 缺项统计收敛到 $x \in X$,若对于 $\forall \epsilon > 0$,有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\mathbf{A}(\epsilon) \cap \{j \in \mathbf{N} : n_{k-1} < j \leq n_k\})^\#}{n_k - n_{k-1}} = 0.$$

其中: $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为缺项序列,即 $n_0 = 0$, $\{n_k\}$ 是递增序列且满足 $n_k - n_{k-1} \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$.

(3) 称序列 $\{x_n\}$ λ -统计收敛到 $x \in X$,若对于 $\forall \epsilon > 0$,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\mathbf{A}(\epsilon) \cap \{j \in \mathbf{N} : n - \lambda_n < j \leq n\})^\#}{\lambda_n} = 0.$$

其中: $\lambda = \{\lambda_n\}$ 为不减的正数序列且满足 $\lambda_1 = 1$,对于任意的 $n \in \mathbf{N}$,有 $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$.

(4) 称序列 $\{x_n\}$ 强统计收敛到 $x \in X$,若对于 $\forall \epsilon > 0$,对 m 一致的有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\mathbf{A}(\epsilon) \cap \{k \in \mathbf{N} : m+1 \leq k \leq m+n\})^\#}{n} = 0.$$

\mathcal{B} -统计收敛最早是由 Kolk^[4]提出的.记 $\mathcal{B} = (\mathbf{B}_m)$ 是一列无穷矩阵构成的集合,对于任意的 $m \in \mathbf{N}$, $\mathbf{B}_m = (b_{i,j}(m))$.

收稿日期: 2010-06-21

通信作者: 施慧华(1981-),女,讲师,主要从事基础数学泛函分析的研究. E-mail: shh817@hqu.edu.cn.

基金项目: 华侨大学高层次人才科研启动项目(10BS215)

定义 2 称 \mathcal{B} 是正则的,若(1) $\|\mathcal{B}\| \equiv \sup_{i,m} \sum_j |b_{i,j}(m)| < \infty$; (2) 对于任意的 $j \geq 1$, 对 m 一致的有 $\lim_{i \rightarrow \infty} b_{i,j}(m) = 0$; (3) 对于任意的 $i \geq 1$, 对 m 一致的有 $\sum_j b_{i,j}(m) = 1$.

记 Re^+ 为所有的正则的矩阵列 \mathcal{B} 且满足对任意的 $i, j, m, b_{i,j}(m) \geq 0$.

定义 3 设 $\mathcal{B} \in Re^+$, 称序列 $\{x_n\}$ \mathcal{B} -统计收敛到 $x \in X$, 若对于 $\forall \epsilon > 0$, 对 m 一致的有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j \in A(\epsilon)} b_{i,j}(m) = 0.$$

据此,可以得到如下的注释.

注释 1 (1) 当 $\mathcal{B} = (C)$ 时, \mathcal{B} -统计收敛即为统计收敛. 其中: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$.

(2) 当 $\mathcal{B} = (A)$ 时, \mathcal{B} -统计收敛即为 A -统计收敛.

(3) 当 $\mathcal{B} = (L)$ 时, \mathcal{B} -统计收敛即为缺项统计收敛. 其中: $\{n_k\}_{k=0}^\infty$ 为缺项序列; 矩阵 L 为

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & \frac{1}{n_1} & & & & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n_2 - n_1} & \cdots & \frac{1}{n_2 - n_1} & \cdots \\ 0 & & \cdots & & 0 & \frac{1}{n_3 - n_2} & \cdots & \frac{1}{n_3 - n_2} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

其中: 对于矩阵 L 的第 k 行, $\frac{1}{n_k - n_{k-1}}$ 的个数为 $n_k - n_{k-1}$ 个, 且第 1 个 $\frac{1}{n_k - n_{k-1}}$ 出现在第 $n_{k-1} + 1$ 列.

(4) 当 $\mathcal{B} = (A)$ 时, \mathcal{B} -统计收敛即为 λ -统计收敛. 其中: $\lambda = \{\lambda_n\}$ 为定义 1 中所给出的, 对 $A = (A(i, j)), \forall i, j \in \mathbf{N}, A(i, j) = 1/\lambda_i, j \in (i - \lambda_i, i]; A(i, j) = 0, j \notin (i - \lambda_i, i]$. 需要注意的是: A 是下三角矩阵, A 的直观矩阵表达与 $\{\lambda_n\}$ 的选取有关, 故无法直接写出.

(5) 当 $\mathcal{B} = (S_m)$ 时, \mathcal{B} -统计收敛即为强统计收敛. 其中: 对于任意 $m \in \mathbf{N}$, 有

$$S_m = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \cdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

其中: 第 1 行的 1 在第 $m + 1$ 列时出现.

由上述注释并结合文献[3]中给出的 \mathcal{B} -统计收敛与一类统计测度之间的等价刻画, 可得到如下定理.

定理 1 序列 $\{x_n\}$ \mathcal{B} -统计收敛到 $x \in X$, 当且仅当对于任意的 $\epsilon > 0$ 和 $\mu \in \Psi_{\mathcal{B}}$, 有 $\mu(A(\epsilon)) = 0$. 其中: $p_{\mathcal{B}}: l^\infty \rightarrow \mathbf{N}$, 有

$$p_{\mathcal{B}}(x) = \lim_i \sup_m \sum_{j=1}^\infty b_{i,j}(m) |x(j)| \quad (x \in l^\infty),$$
$$\Psi_{\mathcal{B}} = \{x^* \circ \pi: x^* \in \partial p_{\mathcal{B}}(e)\} \subset \Psi.$$

据此,可以直接得到统计收敛、 A -统计收敛、缺项统计收敛、 λ -统计收敛及强统计收敛的等价测度刻画, 详细表达式可参见文献[3].

2 \mathcal{B} -统计收敛与收敛

众所周知, Banach 空间 X 上的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in X$ 当且仅当对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n > n_0$, 有 $\|x_n - x\| < \epsilon$. 显然, $\{n \in \mathbf{N} : \|x_n - x\| \geq \epsilon\}^\# \leq n_0$, 从而可得若 $\{x_n\}$ 收敛于 x , 则 $\{x_n\}$ 统计收敛于 x , 即统计收敛是收敛的推广. Fridy^[5] 证明了在 \mathbf{N} 的某一类子集 K 上, 统计收敛可用收敛刻画, 而 Balazs 等^[6] 将其推广到强统计收敛.

对于集合 $K \subseteq \mathbf{N}$, χ_K 表示 K 的特征函数.

定理 2 设若对 Banach 空间上的序列 $\{x_n\}$, 存在 $K = \{k_1, k_2, \dots\} \subseteq \mathbf{N}$ 满足对任意的 $x^* \in \partial p_{\mathcal{B}}(e)$, $\mu(K) = x^*(\chi_K) = 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$, 则 $\{x_n\}$ \mathcal{B} -统计收敛于 x .

证明 设存在 $K \subseteq \mathbf{N}$ 满足假设. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$, 对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n > n_0$, $\|x_{k_n} - x\| < \epsilon$, 则有 $\{k_{n_0+1}, k_{n_0+2}, \dots\} \subseteq \{k_n \in \mathbf{N} : \|x_{k_n} - x\| < \epsilon\} \subseteq \{n \in \mathbf{N} : \|x_n - x\| < \epsilon\}$.

由此可得

$$\mathbf{A}(\epsilon) = \{n \in \mathbf{N} : \|x_n - x\| \geq \epsilon\} \subseteq \mathbf{N} \setminus \{k_{n_0+1}, k_{n_0+2}, \dots\}.$$

对于 $\forall x^* \in \partial p_{\mathcal{B}}(e)$, 注意到 $\mu = x^* \circ \pi \in \Psi$, 则有 $\mu(\{k_1, \dots, k_{n_0}\}) = 0$, 因此有

$$0 \leq \mu(\mathbf{A}(\epsilon)) \leq \mu(\mathbf{N} \setminus \{k_{n_0+1}, k_{n_0+2}, \dots\}) = \mu(\mathbf{N} \setminus K) = \mu(\mathbf{N}) - \mu(K) = 0.$$

根据 ϵ 的任意性并结合定理 1, 可得 $\{x_n\}$ \mathcal{B} -统计收敛于 x .

若 $\mathcal{B} = (\mathbf{B}_m) = ((b_{i,j}(m)))$, 满足

$$\forall i \in \mathbf{N}, \exists m_i \in \mathbf{N}, \quad s.t. \quad \forall j \geq i, \quad b_{i,j}(m_i) = 0, \quad (1)$$

则可得到如下定理.

定理 3 若 Banach 空间上序列 $\{x_n\}$ \mathcal{B} -统计收敛于 x , 其中 \mathcal{B} 满足式(1), 则存在 $K = \{k_1, k_2, \dots\} \subseteq \mathbf{N}$, 使得对于 $\forall x^* \in \partial p_{\mathcal{B}}(e)$, 有 $\mu(K) = x^*(\chi_K) = 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$.

证明 假设 $\{x_n\}$ \mathcal{B} -统计收敛于 x , 由定理 1 可以知道, 对于 $\forall \epsilon > 0$, $\forall x^* \in \partial p_{\mathcal{B}}(e)$, 有 $\mu(\mathbf{A}(\epsilon)) = x^*(\chi_{\mathbf{A}(\epsilon)}) = 0$. 特别地, 令 $\epsilon = 1/h (h = 1, 2, \dots)$, $K_h = \mathbf{N} \setminus \mathbf{A}(1/h)$. 任取 $s_1 \in K_1$, 对于 K_2 , 由于有

$$p_{\mathcal{B}}(\chi_{\mathbf{A}(1/2)}) = \lim_i \sup_m \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m) \chi_{\mathbf{A}(1/2)}(j) = 0,$$

则对于 $1/2 > 0$, 存在 $s_2 > s_1$, $s_2 \in K_2$, 使得对于 $\forall i > s_2$, $\forall m \in \mathbf{N}$, 有 $\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m) \chi_{\mathbf{A}(1/2)}(j) < \frac{1}{2}$. 即

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m) (\chi_{\mathbf{N}} - \chi_{K_2})(j) < \frac{1}{2}, \text{ 从而有 } \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m) (\chi_{K_2})(j) > 1 - \frac{1}{2}. \text{ 也就是说, 对于 } \forall i > s_2, \text{ 有}$$

$$\inf_m \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m) (\chi_{K_2})(j) \geq 1 - \frac{1}{2}.$$

同理, 对于 $K_h (h > 2)$, 存在 $s_h > s_{h-1}$, $s_h \in K_h$, 对于 $\forall i > s_h$, 有

$$\inf_m \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m) (\chi_{K_h})(j) \geq 1 - \frac{1}{h}.$$

定义 $K \subseteq \mathbf{N}$, 若 $1 \leq k \leq s_1$, 则 $k \in K$; 若 $s_h < k \leq s_{h+1}$, 则 $k \in K$ 当且仅当 $k \in K_h$. 对于任意的 $i \in \mathbf{N}$, 存在 $h_i \in \mathbf{N}$ 满足 $s_{h_i} < i \leq s_{h_i+1}$. 注意到 K 的取法和 $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_h \supseteq K_{h+1} \supseteq \dots$, 结合 \mathcal{B} 满足式(1), 则有 $\exists m_i \in \mathbf{N}$, 使得

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m_i) \chi_K(j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m_i) \chi_{K_{h_i}}(j) \geq \inf_m \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m) \chi_{K_{h_i}}(j) \geq 1 - \frac{1}{h_i},$$

从而有 $1 \geq \sup_m \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m) \chi_K(j) \geq 1 - \frac{1}{h_i}$, 因此有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_m \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}(m) \chi_K(j) = 1$. 即有 $p_{\mathcal{B}}(\chi_K) = 1$, 则可得 $p_{\mathcal{B}}(\chi_{\mathbf{N} \setminus K}) = 0$.

对 $\forall x^* \in \partial p_{\mathcal{B}}(e)$, 由次微分的性质并结合 $\mu = x^* \circ \pi$ 的非负性, 易可得 $\mu(\mathbf{N} \setminus K) = 0$, 即 $\mu(K) = 1$.

记 $K = \{k_1, k_2, \dots\}$, 下面证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$.

对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 选择 $h \in \mathbf{N}$ 满足 $1/h < \epsilon$. 对于任意的 $n \geq s_h$, $n \in K$, 则存在 $r \geq h$ 满足 $s_r < n \leq s_{r+1}$. 由 K 的定义可知 $n \in K_r$, 从而有

$$\|x_n - x\| < \frac{1}{r} \leq \frac{1}{h} < \epsilon.$$

即对于任意的 $n \in K, n \geq s_n$, 有 $\|x_n - x\| < \epsilon$. 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$.

特别的, 由注释 1 可得统计收敛所对应的矩阵 \mathbf{C} , λ -统计收敛所对应的矩阵 \mathbf{A} 以及强统计收敛所对应的矩阵列 $\mathcal{B} = (\mathbf{S}_m)_m$ 满足式(1). 由定理 2 容易得到如下推论.

推论 1^[5] Banach 空间上的序列 $\{x_n\}$ 统计收敛于 x , 当且仅当存在 $K = \{k_1, k_2, \dots\} \subseteq \mathbf{N}$, 则有 $\mu(K) = x^*(\chi_K) = 1, \forall x^* \in \partial p_C(e)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$. 其中: $p_C: l^\infty \rightarrow R$ 为

$$p_C(x) = \lim_i \sup \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i |x(j)|, \quad x \in l^\infty.$$

推论 2^[6] Banach 空间上的序列 $\{x_n\}$ 强统计收敛于 x , 当且仅当存在 $K = \{k_1, k_2, \dots\} \subseteq \mathbf{N}$, 有 $\mu(K) = x^*(\chi_K) = 1, \forall x^* \in \partial p_{\mathcal{B}}(e)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$. 其中: $\mathcal{B} = (\mathbf{S}_m)$ 函数 $p_{\mathcal{B}}: l^\infty \rightarrow R$ 定义为

$$p_{\mathcal{B}}(x) = \lim_i \sup_m \sup \frac{1}{i} \sum_{j=1+m}^{i+m} |x(j)|, \quad x \in l^\infty.$$

推论 3 Banach 空间上的序列 $\{x_n\}$ λ -统计收敛于 x , 当且仅当存在 $K = \{k_1, k_2, \dots\} \subseteq \mathbf{N}$, 有 $\mu(K) = x^*(\chi_K) = 1, \forall x^* \in \partial p_A(e)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$. 其中: $p_A: l^\infty \rightarrow R$ 定义为

$$p_A(x) = \lim_k \sup_{\lambda_K} \frac{1}{\sum_{j \in (k-\lambda_k, \lambda_k]} |x(j)|}, \quad x \in l^\infty.$$

参考文献:

[1] FAST H. Sur le convergence statistical[J]. Colloq Math, 1951(2):241-244.
[2] CHENG Li-xin, LIN Guo-chen, LAN Yong-yi, et al. Measure theory of statistical convergence[J]. Science China Series (A), 2008, 51(12):2285-2303.
[3] CHENG Li-xin, LIN Guo-chen, SHI Hui-hua. On real-valued measures of statistical type and their applications to statistical convergence[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 50(1/2):116-122.
[4] KOLK E. Inclusion relations between the statistical convergence and strong summability[J]. Acta et Comm Univ Tartu Math, 1998(2):39-54.
[5] FRIDY J A. On statistical convergence[J]. Analysis, 1985, 5(4):301-313.
[6] BALÁŽ V, ŠALÁT T. Uniform density u and corresponding I_u -convergence[J]. Mathematical Communications, 2006(11):1-7.

Relationship between \mathcal{B} -Statistical Convergence and Convergence

SHI Hui-hua

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Applying \mathcal{B} -convergence, we first show that statistical convergence, \mathbf{A} -statistical convergence, lacunary statistical convergence, λ -statistical convergence and strongly statistical convergence are just the specific types of \mathcal{B} -convergence, and present the representation of these several classical statistical convergence by using measure theory. By establishing the relationship between \mathcal{B} -statistical convergence and convergence, we give the equivalent description between statistical convergence, λ -statistical convergence, strongly statistical convergence and convergence.

Keywords: \mathcal{B} -statistical convergence; convergence; statistical measure; Banach space

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)