

文章编号: 1000-5013(2011)04-0471-04

# 组合 KdV-mKdV 方程的多辛 Fourier 拟谱格式

王志焕, 黄浪扬

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 基于 Hamilton 空间体系下的多辛理论, 提出组合 KdV-mKdV 方程的一个多辛方程组. 通过离散此方程组, 得到原方程的一个多辛 Fourier 拟谱格式, 以及格式的全离散多辛守恒律. 由数值结果可知, 多辛 Fourier 拟谱格式能很好地模拟孤立波运动的波形, 不出现振荡现象, 且在空间方向具有较高的精度和收敛阶.

**关键词:** 组合 KdV-mKdV 方程; 多辛方程组; Fourier 拟谱格式; 数值模拟

**中图分类号:** O 241.82

**文献标志码:** A

1970 年, Tappert<sup>[1]</sup> 在文献[1]中首先提出了组合 KdV-mKdV 方程, 即

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u^2 u_x + \gamma u_{xxx} = 0. \tag{1}$$

式(1)中:  $\alpha, \beta, \gamma$  为实数. 组合 KdV-mKdV 方程能很好地描述在具有非谐束缚粒子的一维非线性晶格中的波的传播; 特别地, 在等离子体物理中, 方程(1)描述了无 Landau 衰变小振幅离子声波的传播; 在固体物理中, 方程(1)被用于解释通过氟化钠单晶的热脉冲传播. 谱方法以其指数阶精度和良好的稳定性得到了广泛的研究和应用. 在已有文献中, 虽然对 KdV 方程及 mKdV 方程多辛算法的研究已经很多<sup>[2-5]</sup>, 但对此类方程保结构谱方法<sup>[6-8]</sup>的研究却很少. 本文研究满足周期边界条件的组合 KdV-mKdV 方程的多辛 Fourier 拟谱方法, 同时导出其离散多辛守恒律.

## 1 组合 KdV-mKdV 方程的多辛方程组及其守恒律

将满足周期边界条件的组合 KdV-mKdV 方程(1)改写为

$$u_t + G'(u)u_x + \gamma u_{xxx} = 0. \tag{2}$$

式(2)中:  $G'(u) = \alpha u + \beta u^2$ . 根据由 Bridges 和 Reich 引入的多辛积分的概念, 对于式(2)引入正则动量  $u_t = v_x, \varphi_x = -u/2, u_x = -\omega$ , 可改写成多辛方程组, 即有

$$\mathbf{M} \partial_t \mathbf{z} + \mathbf{K} \partial_x \mathbf{z} = \nabla_z S(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^4, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2. \tag{3}$$

式(3)中:  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \varphi \\ u \\ v \\ \omega \end{bmatrix}; ; \nabla_z$  为光滑函数  $S: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$  的梯度

算子 Hamilton 函数  $S(\mathbf{z}) = G(u) + 1/2(uv + \gamma\omega^2)$ . 多辛方程组(3)具有重要的多辛守恒律, 有

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \frac{\partial}{\partial x} \kappa = 0. \tag{4}$$

式(4)中:  $\omega$  和  $\kappa$  为预辛形式;  $\omega = \frac{1}{2} dz \Lambda \mathbf{M} dz; \kappa = \frac{1}{2} dz \Lambda \mathbf{K} dz$ .

对组合 KdV-mKdV 方程, 其多辛守恒律为

$$\frac{\partial}{\partial t} (du \Delta d\varphi) + \frac{\partial}{\partial x} (d\varphi \Delta dv + \gamma du \Delta d\omega) = 0.$$

收稿日期: 2010-06-25

通信作者: 王志焕(1976-), 男, 讲师, 主要从事偏微分方程数值解法的研究. E-mail: wangzh12@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10901074)

其中: $\Delta$ 为外积算子.求解多辛方程组(3)的数值方法可表示为

$$\mathbf{M}\partial_t^{j,n}\mathbf{z}_{j,n} + \mathbf{K}\partial_x^{j,n}\mathbf{z}_{j,n} = \nabla_z \mathbf{S}(\mathbf{z}_{j,n}). \quad (5)$$

式(5)中: $\mathbf{z}_{j,n} = \mathbf{z}(x_j, t_n) = \mathbf{z}(j \cdot h, n \cdot \tau)$ ;  $h$ 和 $\tau$ 分别是空间步长和时间步长; $\partial_t^{j,n}$ ,  $\partial_x^{j,n}$ 分别为算子 $\partial_t$ ,  $\partial_x$ 的离散. Bridges 称能保持多辛守恒律(4)的离散形式的格式为多辛格式.

## 2 多辛 Fourier 拟谱格式

多辛 Fourier 拟谱格式,就是将式(5)中的 $\partial_x^{j,n}$ 取为 Fourier 拟谱算子,再用中点 Euler 方法对 $\partial_t^{j,n}$ 进行数值求解.先简单介绍将 Fourier 拟谱方法应用于多辛系统的主要结果<sup>[6-8]</sup>.

假设 $\mathbf{z}(x, t)$ 是以 $L$ 为周期的光滑函数组, $\mathbf{z}(x, t)$ 在配置点( $x_j = j \cdot L/N, j=0, 1, \dots, N-1$ ;其中 $N$ 为偶数)处的插值近似用 $\mathbf{I}_N \mathbf{z}(x, t)$ 表示,且其形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_N \mathbf{z}(x, t) &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{z}_j \left( \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \frac{1}{c_l} \exp(il\mu(x-x_j)) \right) = \\ &= \sum_{l=-N/2}^{N/2} \left( \frac{1}{Nc_l} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{z}_j \exp(-il\mu x_j) \right) \exp(il\mu x). \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)中: $\mathbf{z}_j = \mathbf{z}(x_j, t)$ ;  $c_l = 1(|l| \neq N/2)$ ;  $c_{-N/2} = c_{N/2} = 2$ ;  $\mu = 2\pi/L$ .若记 $g_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \frac{1}{c_l} \exp(il\mu(x-x_j))$ ,则 $g_j(x_k) = \delta_j^k$ .从而有 $\mathbf{I}_N \mathbf{z}(x_j, t) = \mathbf{z}_j$ .这里, $j=0, 1, \dots, N-1$ .

为了得到关于 $\mathbf{z}_j$ 的方程,将式(6)代入多辛方程组(3),并要求方程组(3)在配置点精确成立,即有

$$[\mathbf{M}(\mathbf{I}_N \mathbf{z}(x, t))_t + \mathbf{K}(\mathbf{I}_N \mathbf{z}(x, t))_x] |_{x=x_j} = \nabla_z \mathbf{S}(\mathbf{z}_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

这里的关键是,用 $\mathbf{z}_j$ 来表示偏导数 $\partial^k \mathbf{I}_N \mathbf{z}(x, t) / \partial x^k$ 在配置点 $x_j$ 处的值.为解决此问题,对式(6)求微分,并计算它在点 $x_j$ 处的值,可得

$$\frac{\partial^k \mathbf{I}_N \mathbf{z}(x_j, t)}{\partial x^k} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{z}_n \frac{d^k g_n(x_j)}{dx^k} = (\mathbf{D}_k \mathbf{z})_j. \quad (8)$$

其中: $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})^T$ ;  $\mathbf{D}_k$ 为一 $N \times N$ 矩阵,  $(\mathbf{D}_k)_{j,n} = \frac{d^k g_n(x_j)}{dx^k}$ ,称为 $k$ 阶谱微分矩阵.通过计算<sup>[7]</sup>可以得到

$$(\mathbf{D}_1)_{j,n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu (-1)^{j+n} \cot(\mu \frac{x_j - x_n}{2}), & j \neq n, \\ 0, & j = n. \end{cases} \quad (9)$$

现将组合 KdV-mKdV 方程的多辛方程组(3)改写为分量形式,有

$$\left. \begin{aligned} -u_t + v_x &= 0, \\ \varphi_t + \gamma w_x &= \frac{1}{2} v + G'(u), \\ -\varphi_x &= \frac{1}{2} u, \\ -\gamma u_x &= \gamma w. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

首先,对式(10)在时间方向不离散,在空间方向用 Fourier 拟谱方法进行离散.利用谱微分矩阵,可得组合 KdV-mKdV 方程的 Fourier 拟谱半离散格式为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dt} u_j + (\mathbf{D}_1 \mathbf{v})_j &= 0, \\ \frac{d}{dt} \varphi_j + \gamma (\mathbf{D}_1 \mathbf{w})_j &= \frac{1}{2} v_j + G'(u_j), \\ -(\mathbf{D}_1 \boldsymbol{\varphi})_j &= \frac{1}{2} u_j, \\ -\gamma (\mathbf{D}_1 \mathbf{u})_j &= \gamma w_j. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中: $j=0, 1, \dots, N-1$ ;  $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{N-1})^T$ ;  $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{N-1})^T$ 等.

其次, 在时间方向用 Euler 中点格式对 Fourier 拟谱半离散格式(11)进行离散, 可以得到组合 KdV-mKdV 方程的多辛 Fourier 拟谱离散格式为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + (\mathbf{D}_1 \mathbf{v}^{n+1/2})_j &= 0, \\ \frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\tau} + \gamma(\mathbf{D}_1 \mathbf{w}^{n+1/2})_j &= \frac{1}{2} v_j^{n+1/2} + G'(u_j^{n+1/2}), \\ -(\mathbf{D}_1 \boldsymbol{\varphi}^{n+1/2})_j &= \frac{1}{2} u_j^{n+1/2}, \\ -\gamma(\mathbf{D}_1 \mathbf{u}^{n+1/2})_j &= \gamma \omega_j^{n+1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中:  $j=0, 1, \dots, N-1$ ;  $\tau$  为时间步长;  $\mathbf{u}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1})$ ,  $u_j^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_j^{n+1})$  等.

**命题 1**<sup>[7]</sup> 多辛 Fourier 拟谱格式(12)具有  $N$  个全离散的多辛守恒律, 即

$$\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\tau} + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{D}_1)_{j,k} \boldsymbol{\kappa}_{j,k}^{n+1/2} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (13)$$

其中:  $\omega_j^n = \frac{1}{2} dz_j^n \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{M} dz_j^n$ ;  $\boldsymbol{\kappa}_{j,k}^{n+1/2} = \frac{1}{2} [dz_j^{n+1/2} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K} dz_k^{n+1/2} + dz_k^{n+1/2} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K} dz_j^{n+1/2}]$ .

于是, 对多辛 Fourier 拟谱格式(12), 其全离散多辛守恒律为

$$\begin{aligned} \omega_j^n &= du_j^n \boldsymbol{\Lambda} d\varphi_j^n, \\ \boldsymbol{\kappa}_{j,k}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} [d\varphi_j^{n+1/2} \boldsymbol{\Lambda} dv_k^{n+1/2} + d\varphi_k^{n+1/2} \boldsymbol{\Lambda} dv_j^{n+1/2} + \gamma du_j^{n+1/2} \boldsymbol{\Lambda} d\omega_k^{n+1/2} + \gamma du_k^{n+1/2} \boldsymbol{\Lambda} d\omega_j^{n+1/2}]. \end{aligned}$$

在计算时, 只需知道格式(12)中  $u$  的值, 而不必知道引入的变量  $\varphi, v, \omega$  的值. 若直接用格式(12)进行计算, 将耗费较多的时间和空间, 有时使问题不可求解或降低数值解的精度. 因此, 为了计算方便, 消去多辛 Fourier 拟谱格式(12)的中间变量  $\varphi, v, \omega$ , 并写成矩阵形式, 通过计算可得其等价格式为

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B} \mathbf{u}^n + \mathbf{C} \mathbf{u}^{n-1} - 2\tau \mathbf{D}_1 [G'(\mathbf{u}^{n+1/2}) + G'(\mathbf{u}^{n-1/2})]. \quad (14)$$

式(14)中:  $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{N-1})^T$ ;  $\mathbf{A} = 2\mathbf{E}_N + \tau\gamma(\mathbf{D}_1)^3$ ;  $\mathbf{B} = -2\tau\gamma(\mathbf{D}_1)^3$ ;  $\mathbf{C} = 2\mathbf{E}_N + \tau\gamma(\mathbf{D}_1)^3$ ;  $\mathbf{E}_N$  为  $N$  阶单位矩阵;  $\mathbf{D}_1$  为由式(9)所得到的  $N$  阶矩阵.

### 3 数值实验

在组合 KdV-mKdV 方程(2)中取  $G(u) = u^3 + 1/2u^4$ , 先用多辛 Fourier 拟谱格式(14)对方程的孤立波的长时间行为进行数值模拟. 此时, 组合 KdV-mKdV 方程的精确孤立波解为

$$u(x, t) = -0.5 + \sqrt{2} \operatorname{sech} [\sqrt{2}(x - 0.5t)]. \quad (15)$$

采取在有限区域  $[X_L, X_R]$  上设置人工边界和周期边界条件的方法进行数值模拟. 由于格式(14)是 3 层隐格式, 所以格式在初始时的第 1, 2 层的值均取精确值, 离散得到的非线性方程组用简单迭代方法求解.

取  $X_L = -10, X_R = 10$ , 时间步长  $\tau = 0.001$ , 空间步长  $h = 0.1$ . 在  $t \in [0, 10]$  (计算 10 000 步) 时, 单孤立波传播的模拟结果如图 1 所示. 为了说明谱方法的高精度和良好的稳定性, 定义误差收敛阶为

$$O_h(t_n) = \log_2 \left( \frac{\|e_h(t_n)\|}{\|e_{h/2}(t_n)\|} \right). \quad (16)$$

其中:  $e_h(t_n) = u(jh, t_n) - u_j^n$  是空间步长为  $h$  所产生的误差. 时间步长充分小, 可以减少对空间方向精度的影响. 基于此考虑, 取时间步长  $\tau = 5.0 \times 10^{-5}$ ,  $X_L = -18, X_R = 18$ , 则固定时间步长、不同空间步长的数值结果如表 1 所示. 表 1 中:  $t=1; e_{\max}, O_{\max}$  分别为最大误差及其收敛阶;  $e_{L_2}, O_{L_2}$  分别为  $L_2$  的误差值和收敛阶.

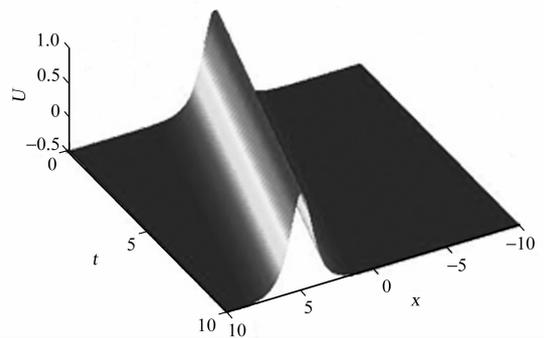


图 1 孤立波的传播

Fig. 1 Propagation of the solitary wave

表1 多辛 Fourier 拟谱格式的误差结果  
Tab.1 Error of multi-symplectic Fourier pseudo-spectral scheme

$h$	$e_{L_2}$	$e_{\max}$	$O_{L_2}$	$O_{\max}$
0.60	$1.0884 \times 10^{-1}$	$5.5507 \times 10^{-2}$	—	—
0.30	$3.2276 \times 10^{-5}$	$1.1628 \times 10^{-5}$	11.719 4	12.220 8
0.15	$1.8256 \times 10^{-9}$	$5.2392 \times 10^{-10}$	14.109 8	14.437 9

## 4 结束语

对组合 KdV-mKdV 方程构造一个多辛方程组,得到原方程的一个多辛 Fourier 拟谱格式.实验结果表明,数值模拟结果与理论相吻合,所构造格式具有高精度与长时间的数值稳定性.

### 参考文献:

- [1] TAPPERTFD. Asymptotic theory of self trapping of heat pulses in solids[J]. Phys Rev Lett, 1970, 25(16): 1108-1111.
- [2] ASCHER U M, MCLACHLAN R I. On symplectic and multisymplectic schemes for the KdV equation[J]. J Sci Comput, 2005, 25(1/2): 83-104.
- [3] 胡伟鹏, 邓子辰, 李文成. KdV 方程的多辛算法及其孤子解的数值模拟[J]. 西北工业大学学报, 2008, 26(1): 128-131.
- [4] WANG Hui-ping, WANG Yu-shun, HU Ying-ying. An explicit scheme for the KdV equation[J]. Chin Phys Lett, 2008, 25(7): 2335-2338.
- [5] 郭峰, 吴凤珍. MKdV 方程的多辛格式[J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2005, 33(1): 128-130.
- [6] BRIDGES T J, REICH S. Multi-symplectic spectral discretizations for the Zakharov-Kuznetsov and shallow water equations[J]. Physica (D), 2001, 152/153: 491-504.
- [7] CHEN Jing-bo. Symplectic and multi-symplectic Fourier pseudospectral methods for the Klein-Gordon equation[J]. Lett Math Phys, 2006, 75(3): 293-305.
- [8] 黄浪扬. 广义 Pochhammer-Chree 方程的多辛 Fourier 拟谱格式及孤立波试验[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2008, 29(3): 468-471.

## Multi-Symplectic Fourier Pseudo-Spectral Scheme for the Combined KdV-mKdV Equation

WANG Zhi-huan, HUANG Lang-yang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** Based on the multi-symplectic theory in Hamilton space, a multi-symplectic systems for the combined KdV-mKdV equation is proposed. By discretizing the systems, a multi-symplectic Fourier pseudo-spectral scheme is obtained. We also obtain the full-discrete multi-symplectic conservation laws for the scheme. Numerical experiments show that the multi-symplectic Fourier pseudo-spectral scheme can well simulate the motion of the soliton, and does not appear oscillation phenomena with high accuracy and convergence order in space direction.

**Keywords:** combined KdV-mKdV equation; multi-symplectic systems; fourier pseudo-spectral scheme; numerical simulating

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 张金顺, 黄心中)