

文章编号: 1000-5013(2011)04-0467-04

拓扑动力系统中一类集合的推广

金相华, 陈尔明

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 进一步讨论一类集合 $L(x_1, x_2)$, 推广其定义; 其次, 研究推广后集合类的相关性质, 并给出等度连续系统的一个刻画. 最后, 对集合 $L(x_1, x_2)$ 与 $L(x_1, x_2, x_3)$ 之间的关系进行讨论, 得到一个新的结果.

关键词: 动力系统; 邻域; 不变集; 传递系统; 极小系统; 回复点; 混沌

中图分类号: O 19; O 152.4

文献标志码: A

1 预备知识

定义 1^[1] 设 X 为紧致的 Hausdorff 空间, G 为拓扑群, 若 $\phi: G \times X \rightarrow X$ 连续且满足: (1) 对任意 $x \in X$, 有 $\phi(e, x) = x$, e 为 G 的单位元; (2) 对任意 $x \in X$, 以及 $g_1, g_2 \in G$, 有 $\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x)$ 成立. 那么就称 (X, G, ϕ) 为一个拓扑动力系统. 一般地, 也直接用 (X, G) 表示一个拓扑动力系统.

如果 $G = \mathbb{Z}$ 为整数加群, 那么称 (X, \mathbb{Z}) 为一个离散动力系统. 由于一个离散动力系统可由一个同胚映射生成, 因此, 直接用 (X, T) 表示离散动力系统. 如果 $G = \mathbb{Z}_+$ 为非负整数加法半群, 那么称 (X, \mathbb{Z}_+) 为一个半离散动力系统. 一个半离散动力系统可由一个连续映射生成. 文中所指的动力系统是指偶对 (X, T) . 其中: X 为紧度量空间; $T: X \rightarrow X$ 为连续映射.

定义 2^[1] 设 A 为 X 的子集, 如果 $T(A) \subseteq A$, 则称 A 为正不变集或不变集.

定义 3^[1] 设 (X, T) 为动力系统, $x \in X$. 如果 $Tx = x$, 那么点 x 称为不动点; 如果存在某个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^n x = x$ 成立, 那么点 $x \in X$ 称为周期点, 而满足 $T^n x = x$ 的最小正整数 n 称为 x 的周期.

定义 4^[1] 设 (X, T) 为动力系统, $x \in X$ 及 $U, V \subset X$, 定义回复时间集为 $N(U, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : U \cap T^{-n}V \neq \emptyset\}$; 定义 x 进入 U 的回复时间集为 $N(x, U) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : T^{-n}x \in U\}$.

定义 5^[1] 称动力系统 (X, T) 或 T 为传递的, 是指对 X 的任意两个非空开集 U, V , 有 $N(U, V) \neq \emptyset$.

定义 6^[1] $x \in X$ 称为一个回复点是指存在正整数序列 $\{n_i\}$ 满足 $T^{n_i}x \rightarrow x, (n_i \rightarrow +\infty)$.

定义 7^[1] 动力系统 (X, T) 称为极小的是指它不真包含任何闭不变子集.

定义 8^[2] 定义 $L(x_1, x_2)$ 为 X 的子集, 使得对该子集的每个 x_3 及 $x_i, i = 1, 2, 3$ 的每个邻域 u_i , 存在 $x, y \in u_3$ 及 $n \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $T^n x \in u_1, T^n y \in u_2$.

定义 9^[3] 设 (X, T) 为动力系统, $(x_1, x_2) \in X \times X, x_1 \neq x_2$. 如果对 $x_i, i = 1, 2$ 的每个非空开邻域 u_i 有 $N(u_1, u_1) \cap N(u_1, u_2) \neq \emptyset$ 成立, 则称 (x_1, x_2) 为弱混合对. $WM(X, T)$ 表示 (X, T) 的全体弱混合对.

定义 10^[1] (X, T) 称为等度连续的是指函数族 $\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 为等度连续的, 即对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(x_1, x_2) < \delta$ 时, $d(T^n x_1, T^n x_2) < \epsilon$, 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 成立.

定义 11^[4] X 中的一个子集 A 是稠密的, 如果它的闭包是整个 X . 等价地有, X 中的一个子集 A 是稠密的, 如果这个子集中有点任意接近 X 中任意给定的点.

定义 12^[4] f 是一个将区间 $I = [\alpha, \beta]$ 映到自身的映射. 称 f 是混沌的, 如果 (1) f 的周期点在 I 中稠密; (2) f 在 I 上是传递的, 即对于 I 的任意两个区间 u_1, u_2 都存在 $x_0 \in u_1$, 以及存在一个 $n > 0$, 使得

收稿日期: 2010-05-13

通信作者: 金相华(1978-), 女, 讲师, 主要从事拓扑动力学的研究. E-mail: jinxianghua@hqu.edu.cn.

$f^n(x_0) \in u_2$; (3) f 在 I 中有敏感依赖性,即存在敏感常数 $\beta > 0$,使得对于任意的 $x_0 \in I$ 及关于 x_0 的任意开区间 u ,都存在某一种子 $y_0 \in u$ 和 $n \in \mathbb{Z}_+$,使得 $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$.

定理 1^[5] 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续的一一对应,其中 X 紧致, Y 是 Hausdorff 空间,则 f 是同胚.

定理 2^[1] 设 (X, T) 为动力系统, $x_1 \neq x_2 \in X$, 则 $(x_1, x_2) \in WM(X, T)$ 当且仅当 $x_1 \in L(x_1, x_2)$.

定理 3^[1] 设 (X, T) 为动力系统, 则 (X, T) 为等度连续的当且仅当 $WM(X, T) = \emptyset$.

2 主要结论与定理

设 (X, T) 为动力系统, $x_1, x_2, x_3 \in X$, 记 $\Delta_X = \{(x, x, x) | x \in X\}$.

定义 13 $L(x_1, x_2, x_3)$ 为 X 的子集,使得对该子集的每个 x_4 及 $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ 的每个邻域 u_i , 存在 $x, y, z \in u_4$ 及 $n \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $T^n x \in u_1, T^n y \in u_2, T^n z \in u_3$ 成立.

注 1 由定义 8, 13 易知, $L(x_1, x_2, x_3) \subseteq L(x_i, x_j)$. 其中: $i \neq j; i, j = 1, 2, 3$.

定义 14 $L(x_1, x_2, x_3)$ 为 X 的子集,使得对该子集的每个 x_4 及 $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ 的每个邻域 u_i , 存在 $x, y, z \in u_4$. 满足 $N(x, u_1) \cap N(y, u_2) \cap N(z, u_3) \neq \emptyset$ 成立.

注 2 由定义 13 与定义 14 是等价的.

定义 15 $Q^3(X, T)$ 为所有满足下列条件的点集. $(x_1, x_2, x_3) \in X \times X \times X$, 对任何 $\epsilon > 0$ 及 x_i 的开邻域 $u_i, i = 1, 2, 3$, 存在 $x'_i \in u_i, i = 1, 2, 3$ 及 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $d(T^n x'_i, T^n x'_j) < \epsilon$. 其中: $i \neq j; i, j = 1, 2, 3$.

定义 16 称 $(x_1, x_2, x_3) \in X \times X \times X / \Delta_X$ 为弱混合 3-序列. 若对 $x_i, i = 1, 2, 3$ 的每个非空开邻域 u_i 有 $N(u_1, u_1) \cap N(u_1, u_2) \cap N(u_1, u_3) \neq \emptyset$ 成立. 记全体弱混合 3-序列所成点集为 $WM^3(X, T)$.

性质 1 $L(x_1, x_2, x_3)$ 为 T 不变的闭子集.

证明 先说明 $L(x_1, x_2, x_3)$ 为 T 不变的. 设 $x_4 \in L(x_1, x_2, x_3)$ 对 Tx_4 的每个邻域 V 及 x_i 的每个邻域 $u_i, i = 1, 2, 3$, 因 T 连续, 由文献[6]可知, $T^{-1}V$ 是 x_4 的邻域. 又因 $x_4 \in L(x_1, x_2, x_3)$, 从而存在 $x_0, y_0, z_0 \in T^{-1}V$ 及 $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{n_0+1}x_0 \in u_1, T^{n_0+1}y_0 \in u_2, T^{n_0+1}z_0 \in u_3$ 成立. 即存在 $Tx_0, Ty_0, Tz_0 \in V$ 及 $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{n_0}(Tx_0) \in u_1, T^{n_0}(Ty_0) \in u_2, T^{n_0}(Tz_0) \in u_3$ 成立. 由 $L(x_1, x_2, x_3)$ 的定义可以知道, $Tx_4 \in L(x_1, x_2, x_3)$.

下面说明 $L(x_1, x_2, x_3)$ 为 X 的闭子集. 设 $y_k \in L(x_1, x_2, x_3), k = 1, 2, 3, \dots; y_k \rightarrow y(k \rightarrow \infty)$. 只要证明 $y \in L(x_1, x_2, x_3)$ 即可. 对 y 的每个邻域 u_4 及 x_i 的每个邻域 $u_i, i = 1, 2, 3$, 由 $y_k \rightarrow y(k \rightarrow \infty)$ 可知, 存在 $K \in \mathbb{Z}_+$, 使得当 $k > K$ 时, 有 $y_k \in u_4$, 从而 u_4 可看成 $y_k(k > K)$ 的邻域. 又由于 $y_k \in L(x_1, x_2, x_3)$, 故存在 $x_0, y_0, z_0 \in u_4$ 及 $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{n_0}x_0 \in u_1, T^{n_0}y_0 \in u_2, T^{n_0}z_0 \in u_3$ 成立, 从而有 $y \in L(x_1, x_2, x_3)$.

性质 2 若 T 为同胚, 且 $(x_1, x_2, x_3) \in Q^3(X, T^{-1})$, 则 $L(x_1, x_2, x_3)$ 为非空的 T 不变的闭子集.

证明 $L(x_1, x_2, x_3)$ 为 T 不变的闭子集, 其证明见性质 1. 下面证明 $L(x_1, x_2, x_3)$ 为非空.

由于 $(x_1, x_2, x_3) \in Q^3(X, T^{-1})$, 因此, 对于任何 $\epsilon > 0$ 及 x_i 的开邻域 $u_i, i = 1, 2, 3$, 存在 $x'_i \in u_i, i = 1, 2, 3$ 及 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $d(T^{-n}x'_i, T^{-n}x'_j) < \epsilon$. 其中: $i \neq j; i = 1, 2, 3$. 从而存在 $x'_i \in u_i, i = 1, 2, 3$ 及 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^{-n}x'_i \in u_1, T^{-n}x'_2 \in u_1, T^{-n}x'_3 \in u_1$ 成立. 记 $x = T^{-n}x'_1, y = T^{-n}x'_2, z = T^{-n}x'_3$, 则 $x, y, z \in u_1$. 又由于 T 为同胚, 有 $T^n x = x'_1 \in u_1, T^n y = x'_2 \in u_2, T^n z = x'_3 \in u_3$ 成立, 从而有 $x_1 \in L(x_1, x_2, x_3)$, 即 $L(x_1, x_2, x_3)$ 非空.

定理 4 设 (X, T) 为动力系统, $(x_1, x_2, x_3) \in X \times X \times X / \Delta_X$, 则 $(x_1, x_2, x_3) \in WM^3(X, T)$ 当且仅当 $x_1 \in L(x_1, x_2, x_3)$.

证明 $(x_1, x_2, x_3) \in WM^3(X, T)$ 当且仅当对于 $x_i, i = 1, 2, 3$ 的每个非空开邻域 u_i , 有 $N(u_1, u_1) \cap N(u_1, u_2) \cap N(u_1, u_3) \neq \emptyset$ 成立. 即对于 $x_i, i = 1, 2, 3$ 的每个非空开邻域 u_i , 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $u_1 \cap T^{-n}u_1 \neq \emptyset, u_1 \cap T^{-n}u_2 \neq \emptyset, u_1 \cap T^{-n}u_3 \neq \emptyset$ 成立. 从而存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 及 x, y, z , 使得 $x \in u_1 \cap T^{-n}u_1, y \in u_1 \cap T^{-n}u_2, z \in u_1 \cap T^{-n}u_3$ 成立. 即对 $x_i, i = 1, 2, 3$ 的每个非空开邻域 u_i , 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 及 $x, y, z \in u_1$, 使得 $T^n x \in u_1, T^n y \in u_2, T^n z \in u_3$ 成立. 故 $(x_1, x_2, x_3) \in WM^3(X, T)$ 当且仅当 $x_1 \in L(x_1, x_2, x_3)$.

定理 5 设 (X, T) 为可逆的动力系统, 则 $WM^3(X, T) \subseteq Q^3(X, T^{-1})$.

证明 因 (X, T) 为可逆的动力系统, 其中 X 为紧致的度量空间, 从而为紧致的 Hausdorff 空间, 由

定理 1 可知 T 同胚.

设 $(x_1, x_2, x_3) \in WM^3(X, T)$, 则对 $x_i, i=1, 2, 3$ 的每个非空开邻域 u_i , 有 $N(u_1, u_1) \cap N(u_1, u_2) \cap N(u_1, u_3) \neq \emptyset$ 成立. 因此, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $T^n u_1 \cap u_1 \neq \emptyset, T^n u_1 \cap u_2 \neq \emptyset, T^n u_1 \cap u_3 \neq \emptyset$ 成立. 再利用 T 同胚, 从而可得存在 $x'_i \in u_i, i=1, 2, 3$, 满足 $T^{-n} x'_1 \in u_1, T^{-n} x'_2 \in u_1, T^{-n} x'_3 \in u_1$ 成立.

由定义 15 可知, $(x_1, x_2, x_3) \in Q^3(X, T^{-1})$, 从而有 $WM^3(X, T) \subseteq Q^3(X, T^{-1})$.

定理 6 设 (X, T) 为可逆的极小动力系统, 则 $WM^3(X, T) = Q^3(X, T^{-1})/\Delta_X = Q^3(X, T)/\Delta_X$.

证明 先证 $Q^3(X, T) = Q^3(X, T^{-1})$. 设 $(x_1, x_2, x_3) \in Q^3(X, T^{-1})$, 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $x'_i \in B(x_i, \epsilon), i=1, 2, 3$ 及 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $d(T^{-n} x'_i, T^{-n} x'_j) < \epsilon/3$. 其中: $i \neq j; i, j=1, 2, 3$.

(X, T) 为极小动力系统, 可假设 (x'_1, x'_2, x'_3) 为 $T \times T \times T$ 的回复点, 从而有 $x'_i, i=1, 2, 3$ 为 T 的回复点. 再由 T^{-n} 的连续性可知, 对上述 $\epsilon > 0$, 存在充分大的 $m \in \mathbb{Z}_+$ 及 $\delta > 0$, 使得当 $d(T^{m+n} x'_i, x'_i) < \delta$ 时, 有 $d(T^{-n}(T^{m+n} x'_i), T^{-n}(x'_i)) < \epsilon/3$ 成立. 即存在 $m \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $d(T^m x'_i, T^{-n} x'_i) = d(T^{-n}(T^{m+n} x'_i), T^{-n}(x'_i)) < \epsilon/3$ 成立, 从而 $d(T^m x'_i, T^m x'_j) < d(T^m x'_i, T^{-n} x'_i) + d(T^{-n} x'_i, T^{-n} x'_j) + d(T^{-n} x'_j, T^m x'_j) < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon, i \neq j; i, j=1, 2, 3$. 这说明 $(x_1, x_2, x_3) \in Q^3(X, T)$, 因此 $Q^3(X, T^{-1}) \subseteq Q^3(X, T)$. 因 (X, T^{-1}) 也为极小动力系统, 经过类似的讨论可得, $Q^3(X, T) \subseteq Q^3(X, T^{-1})$.

其次, 证明 $WM^3(X, T) = Q^3(X, T^{-1})/\Delta_X = Q^3(X, T)/\Delta_X$. 设 $(x_1, x_2, x_3) \in WM^3(X, T)$, 由定理 5 可知, $(x_1, x_2, x_3) \in Q^3(X, T^{-1})/\Delta_X$. 设 $(x_1, x_2, x_3) \in Q^3(X, T^{-1})/\Delta_X$, 由 (X, T) 可逆及定理 1 可知, T 同胚. 又由性质 2 可得 $L(x_1, x_2, x_3)$ 为 X 的非空 T 不变的闭子集, 从而存在 $x \in L(x_1, x_2, x_3)$. (X, T) 为极小动力系统, 因此 $X = L(x_1, x_2, x_3)$.

特别地, $x_1 \in L(x_1, x_2, x_3)$. 由定理 4 可得, $(x_1, x_2, x_3) \in WM^3(X, T)$.

定理 7 (X, T) 为等度连续的, 则 $WM^3(X, T) = \emptyset$.

证明 若 $WM^3(X, T) = \emptyset$, 则存在 $(x_1, x_2, x_3) \in X \times X \times X/\Delta_X$, 使得 $(x_1, x_2, x_3) \in WM^3(X, T)$. 即存在 $j \in \{2, 3\}$, 使得 $x_1 \neq x_j$ 且 $(x_1, x_2, x_3) \in WM^3(X, T)$, 从而利用定理 4 可知, 存在 $x_j, j \in \{2, 3\}$, 使得 $x_1 \in L(x_1, x_2, x_3) \subseteq L(x_1, x_j)$. 再利用定理 2, 有 $(x_1, x_j) \in WM(X, T)$ 成立, 即 $WM(X, T) = \emptyset$. 从而由定理 3 可得 (X, T) 不为等度连续的, 与已知矛盾, 故 $WM^3(X, T) = \emptyset$.

定理 8 设 (X, T) 为极小动力系统, 则 $X = L(x_1, x_2) = L(x_1, x_2, x_3)$.

证明 (X, T) 为极小动力系统, 因此 X 不真包含任何闭不变的子集. 由文献[2]及性质 1 可知, $L(x_1, x_2), L(x_1, x_2, x_3)$ 均为 X 的闭不变的子集. 从而有 $X = L(x_1, x_2) = L(x_1, x_2, x_3)$.

注 3 对于非极小的动力系统, $X = L(x_1, x_2) = L(x_1, x_2, x_3)$ 一般不成立, 有 $L(x_1, x_2) \supset L(x_1, x_2, x_3)$. 下面举例说明.

例 1 设 $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 其定义如下: (1) 如果 $0 \leq x < 1/3, T(x) = x$; (2) 如果 $1/3 \leq x < 4/9, T(x) = 3x - 2/3$; (3) 如果 $4/9 \leq x < 5/9, T(x) = -3x + 2$; (4) 如果 $5/9 \leq x \leq 2/3, T(x) = 3x - 4/3$; (5) 如果 $2/3 < x \leq 1, T(x) = x$. 映射 T, T^2, T^3, T^4 在区间 $[0, 1]$ 上的图像, 如图 1 所示. 显然, T 连续且为满射.

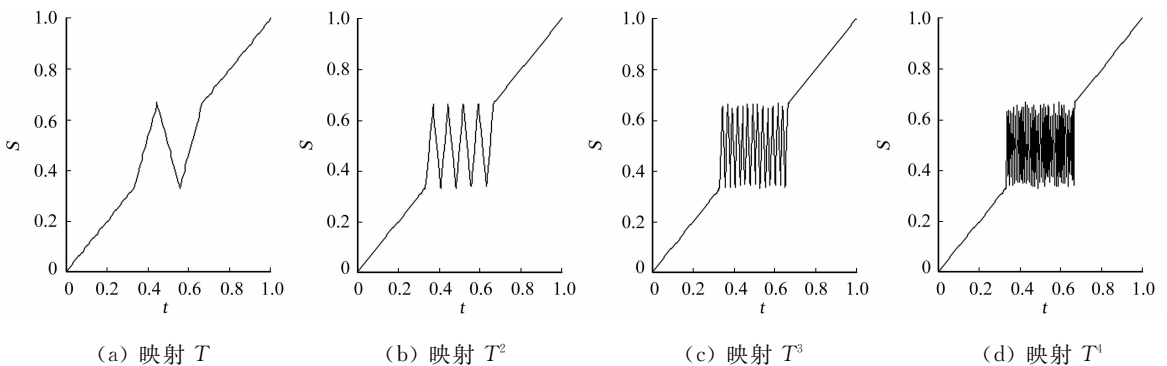


图 1 映射在 $[0, 1]$ 上的图像

Fig. 1 Map image on the $[0, 1]$

下面说明存在 $x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]$, 使得 $L(x_1, x_2) \supset L(x_1, x_2, x_3)$.

证明 首先说明 T 在 $[1/3, 2/3]$ 上是混沌的.

(1) 因 T^n 将任何形如 $[1/3+k/3^{n+1}, 1/3+(k+1)/3^{n+1}]$, $k=0, 1, \dots, 3^n-1$ 的区间映满区间 $[1/3, 2/3]$, 于是, T^n 的图像与对角线在这些区间上的某点相交, 从而在每个这种区间中都有一个周期点. 由于这些区间的长度为 $1/3^{n+1}$, 因而 T 的周期点在 $[1/3, 2/3]$ 中稠密.

(2) 因为任给开区间 U , 对于充分大的 $n \in \mathbb{Z}_+$, 总可以在 U 内部找到一个形如 $[1/3+k/3^{n+1}, 1/3+(k+1)/3^{n+1}]$ 的区间, 从而 T^n 就将 U 映满区间 $[1/3, 2/3]$, 即 T 在 $[1/3, 2/3]$ 上是传递的.

(3) 取敏感常数为 $1/9$, 则由(2)的证明易知, T 在 $[1/3, 2/3]$ 中有敏感依赖性.

综上所述, T 在 $[1/3, 2/3]$ 上是混沌的. 下面说明 $L(x_1, x_2) \supset L(x_1, x_2, x_3)$, 取 $x_1, x_2 \in [1/3, 2/3]$, $x_3 \in [0, 1/3) \cup (2/3, 1]$.

(1) 对于 x_i 的每个邻域 $u_i, i=1, 2$, 因 T 在 $[1/3, 2/3]$ 上是混沌的, 故存在充分大 $n \in \mathbb{Z}_+$ 及 $x, y \in u_1$, 满足 $T^n x \in u_1, T^n y \in u_2$ 成立. 即 $x_1 \in L(x_1, x_2)$, 从而有 $L(x_1, x_2) \neq \emptyset$.

(2) 取 $u_1, u_2 \subset [1/3, 2/3], u_3 \subset [0, 1/3) \cup (2/3, 1]$. 对于任意的 $x_4 \in [0, 1/3) \cup (2/3, 1]$, 取 x_4 的邻域 $u_4 \subset [0, 1/3) \cup (2/3, 1]$, 则由 x_4 为不动点可知, 对于任意的 $n \in \mathbb{Z}_+$ 有 $T^n x_4 = x_4$ 成立. 即 u_4 中的点迭代后无法进入 u_1, u_2 中, 从而有 $x_4 \notin L(x_1, x_2, x_3)$. 对于任意的 $x_4 \in [1/3, 2/3]$, 取 x_4 的邻域 $u_4 \subset [1/3, 2/3]$, 则 u_4 中的点迭代任意次后仍落在 $[1/3, 2/3]$ 中, 从而无法进入 u_3 中. 因此 $x_4 \notin L(x_1, x_2, x_3)$, 故 $L(x_1, x_2, x_3) = \emptyset$.

由(1)(2)可知, $L(x_1, x_2) \neq L(x_1, x_2, x_3)$, 从而有 $L(x_1, x_2) \supset L(x_1, x_2, x_3)$.

参考文献:

[1] 叶向东, 黄文, 邵松. 拓扑动力系统概论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
[2] HUANG W, LI S M, SHAO S, et al. Null systems and sequence entropy pairs[J]. Ergod Th and Dynam Sys, 2003, 23(5): 1505-1523.
[3] HUANG W. Tame systems and scrambled pairs under an Abelian group action[J]. Ergod Th and Dynam Sys, 2006, 26(5): 1549-1567.
[4] HIRSCH M W, SMALE S, DEVANEY R L. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos[M]. Beijing: Posts and Telecom Press, 2008: 264-276.
[5] 尤承业. 基础拓扑学讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1997: 55-56.
[6] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003: 62-63.

Some Generalizations of a Class of Sets
in Topological Dynamical Systems

JIN Xiang-hua, CHEN Er-ming

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we give further discussions about a class of sets $L(x_1, x_2)$. First, we generalize its definitions and study the relative properties of these generalized sets. Then we give a characterization of equicontinuous systems. Finally, by discussing the relationship between $L(x_1, x_2)$ and $L(x_1, x_2, x_3)$, we obtain a new result.

Keywords: dynamical system; neighborhood; invariant set; transitive system; minimal system; recurrent point; chaos

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 张金顺, 黄心中)