第 32 卷　第 4 期　　华侨大学学报（自然科学版）　　Vol. 32　No. 4
2011 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2011

文章编号：　1000-5013(2011)04-0463-04

二阶矩随机过程的随机积分的若干性质

姚村，林峰

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要：　讨论二阶矩随机过程的随机积分的若干性质．利用这些性质和解析函数边值理论的知识，证明 Cauchy 核随机奇异积分的若干性质，得到相对应的 Plemelj 公式.

关键词：　二阶矩；随机积分；Cauchy 核；Plemelj 式

中图分类号：　O 175.8　　　**文献标志码：**　A

王传荣在文献[1]建立了 Cauchy 核随机奇异积分的概念，并给出了此奇异积分的存在性定理；在文献[2]给出了此随机奇异积分的其他性质及与其相对应的 Plemelj 公式. 本文证明了二阶矩随机过程的随机积分的一些性质，并利用这些性质证明文献[2]中的 Plemelj 公式.

1　预备知识

(Ω,F,P)是一个概率空间，以下提到的随机过程皆是此空间上的二阶矩随机过程，即随机过程的均值和方差都存在.

设 L 为一简单光滑或分段光滑曲线.

定义 1　设 $g(\omega,\zeta)(\zeta\in L)$为二阶矩随机过程，当 $\zeta\to\zeta_0$ 时，如果存在随机过程 $f(\omega,\zeta)$，使得

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} E\{\,|\,g(\omega,\zeta)-f(\omega,\zeta_0)\,|^2\}=0,$$

则称二阶矩随机过程 $g(\omega,\zeta)$在 $\zeta\to\zeta_0$ 时，均方收敛(l. i. m)于 $f(\omega,\zeta_0)$. 记为$\underset{\zeta\to\zeta_0}{\mathrm{l.\,i.\,m}}\, g(\omega,\zeta)=f(\omega,\zeta_0)$，或者 $g(\omega,\zeta)\xrightarrow{\text{m. s.}}f(\omega,\zeta_0)(\zeta\to\zeta_0)$. 其中：m. s. 表示均方，下同.

定义 2　设 $g(\omega,\zeta)(\zeta\in L)$是一二阶矩随机过程，若存在 $\alpha\in(0,1]$，对于 L 上任意两点 ζ_1,ζ_2，都满足 $E\{|g(\omega,\zeta_1)-g(\omega,\zeta_2)|^2\}\leqslant A|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha$（$A$ 为常数）. 则称 $g(\omega,\zeta)$在均方度量意义下满足 α 阶的 Hölder 条件，记为 $g(\omega,\zeta)\in H^\alpha(L)(\mathrm{m.\,s.})$.

定义 3　设 $\zeta_0\in L, l_\delta=\{\zeta\in L: |\zeta-\zeta_0|<\delta\}, L_\delta=L-l_\delta$，$g(\omega,\zeta)$是二阶矩随机过程，若存在随机过程 $f(\omega,\zeta)$，使得

$$\lim_{\delta\to 0} E\left\{\left|\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_\delta}\frac{g(\omega,\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\mathrm{d}\zeta-f(\omega,\zeta_0)\right|^2\right\}=0,$$

则存在 Cauchy 核随机奇异积分为

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\mathrm{d}\zeta=f(\omega,\zeta_0),\qquad \zeta_0\in L.$$

引理 1　假设 $g(\omega,\zeta)$是 L 上的二阶矩随机过程，$R_g(\zeta_1,\zeta_2)=E\{g(\omega,\zeta_1)\overline{g(\omega,\zeta_2)}\}$，则有 $g(\omega,\zeta)\in H(L)(\mathrm{m.\,s.})$的充分必要条件是 $R_g(\zeta_1,\zeta_2)\in H(L\times L)$.

引理 2　若 $R_g(\omega,\zeta)\in H(L\times L)$，则随机奇异积分

$$F(\omega,\zeta_0)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\mathrm{d}\zeta,$$

收稿日期：　2010-05-03

通信作者：　林峰(1962-)，男，副教授，主要从事函数论的研究. E-mail：lfeng@hqu.edu.cn.

基金项目：　福建省自然科学基金资助项目(2007J0183)

在均方度量意义下存在.

定理 1 若 $g(\omega,\zeta)\in H^{\alpha}(L)(\mathrm{m.s.})$,$\alpha\in(0,1]$,则 $g(\omega,\zeta)$在 L 上均方可积.

证明 由于 $g(\omega,\zeta)\in H^{\alpha}(L)(\mathrm{m.s.})$,所以 $R_g(\zeta,\zeta')\in H(L\times L)$,即可知 $\int_L\int_L R_g(\zeta,\zeta')\mathrm{d}\zeta\overline{\mathrm{d}\zeta'}$ 存在.

对 L 作一种分割,记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}g(\omega,\zeta'_{1_i})\Delta\zeta_{1_i}$,其为一随机变量序列;对 L 作另一种分割,得另一随机变量序列 $S_m=\sum_{k=1}^{n}g(\omega,\zeta'_{2_k})\Delta\zeta_{2_k}$. 于是有

$$\lim_{\substack{n,m\to\infty\\ \max|\Delta\zeta_{1_i}|\to0\\ \max|\Delta\zeta_{2_k}|\to0}}E\{S_n\overline{S}_m\}=E\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}g(\omega,\zeta'_{1_i})\overline{g(\omega,\zeta'_{2_k})}\Delta\zeta_{1_i}\overline{\Delta\zeta_{2_k}}\}=$$

$$\lim_{\substack{n,m\to\infty\\ \max|\Delta\zeta_{1_i}|\to0\\ \max|\Delta\zeta_{2_k}|\to0}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E\{g(\omega,\zeta'_{1_i})\overline{g(\omega,\zeta'_{2_k})}\}\Delta\zeta_{1_i}\overline{\Delta\zeta_{2_k}}=$$

$$\lim_{\substack{n,m\to\infty\\ \max|\Delta\zeta_{1_i}|\to0\\ \max|\Delta\zeta_{2_k}|\to0}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R_g(\zeta'_{1_i},\zeta'_{2_k})\Delta\zeta_{1_i}\overline{\Delta\zeta_{2_k}}=\int_L\int_L R_g(\zeta,\zeta')\mathrm{d}\zeta\overline{\mathrm{d}\zeta'}.$$

由 Loeve 准则[3]可知,S_n 均方收敛,即 $g(\omega,\zeta)$在 L 上均方可积.

定理 2 若 $g(\omega,\zeta)\in H^{\alpha}(L)(\mathrm{m.s.})$,$\alpha\in(0,1]$,则有

$$\{E\mid\int_L g(\omega,\zeta)\mathrm{d}\zeta\mid^2\}^{1/2}\leqslant\int_L\{E\mid g(\omega,\zeta)\mid^2\}^{1/2}\mid\mathrm{d}\zeta\mid.$$

证明 由于 $g(\omega,\zeta)\in H^{\alpha}(L)(\mathrm{m.s.})$,则 $R_g(\zeta,\zeta')\in H(L\times L)$,故 $R_g(\zeta,\zeta')$在 $L\times L$ 上可积. 即可知 $\int_L g(\omega,\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 存在,而$\int_L\{E\mid g(\omega,\zeta)\mid^2\}^{1/2}\mid\mathrm{d}\zeta\mid=\int_L[R_g(\zeta,\zeta)]^{1/2}\mid\mathrm{d}\zeta\mid$ 也存在.

对 L 作分割,令 $\lambda=\max|\Delta\zeta_i|$. 注意到三角不等式 $\sqrt{E|\zeta+\eta|^2}\leqslant\sqrt{E|\zeta|^2}+\sqrt{E|\eta|^2}$,其推广式为

$$\{E\mid\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\mid^2\}^{1/2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\{E\mid\zeta_i\mid^2\}^{1/2}.$$

所以有

$$\{E\mid\int_L g(\omega,\zeta)\mathrm{d}\zeta\mid^2\}^{1/2}=\{E\mid\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to0}}\sum_{i=1}^{n}g(\omega,\zeta'_i)\Delta\zeta_i\mid^2\}^{1/2}=$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to0}}\{E\mid\sum_{i=1}^{n}g(\omega,\zeta'_i)\Delta\zeta_i\mid^2\}^{1/2}\leqslant\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to0}}\sum_{i=1}^{n}\{E\mid g(\omega,\zeta'_i)\mid^2\mid\Delta\zeta_i\mid^2\}^{1/2}=$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to0}}\sum_{i=1}^{n}\{E\mid g(\omega,\zeta'_i)\mid^2\}^{1/2}\mid\Delta\zeta_i\mid=\int_L\{E\mid g(\omega,\zeta)\mid^2\}^{1/2}\mid\mathrm{d}\zeta\mid.$$

即有

$$\{E\mid\int_L g(\omega,\zeta)\mathrm{d}\zeta\mid^2\}^{1/2}\leqslant\int_L\{E\mid g(\omega,\zeta)\mid^2\zeta\}^{1/2}\mid\mathrm{d}\zeta\mid.$$

2 主要结果及其证明[4-6]

定理 3 设 L 是一分段光滑曲线,$g(\omega,\zeta)\in H^{\alpha}(\mathrm{m.s.})$,$\alpha\in(0,1]$. 若 l 是 L 上的一段子弧,其长仍记为 l,则对平面中任何点 z,恒有

$$E\left|\int_l\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right|^2\leqslant Ml^{\alpha}.$$

其中:M 是一个与 l 以及 z 无关的常数.

证明 设弧 l 以 a,b 为起终点,L 上任何点 ζ 的弧坐标为 s_ζ. 不妨设 $s_a<a_b$. 因为 L 为光滑曲线,所

以弦弧不等式在 l 上成立，又因为 $g(\omega,\zeta)\in H^{\alpha}$（m. s.），所以有 $\int_l \frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}$ 和 $\int_l\left(E\left|\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}\right|^2\right)^{1/2}|d\zeta|$ 存在. 由定理 2，有

$$E\left|\int_l \frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}d\zeta\right|^2\leqslant\left\{\int_l\left(E\left|\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}\right|^2\right)^{1/2}|d\zeta|\right\}^2\leqslant$$

$$\left\{\int_l\left(\frac{2^{\alpha}A\,|\zeta-z|^{\alpha}}{|\zeta-z|^2}\right)^{1/2}|d\zeta|\right\}^2=2^{\alpha}A\left\{\int_l\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{1-\alpha/2}}\right\}^2\leqslant 2A\left\{\int_l\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{1-\alpha/2}}\right\}^2\leqslant$$

$$\frac{2A}{C^{2-\alpha}}\left\{\int_l\frac{ds}{|s-s_{z_l}|^{1-\alpha/2}}\right\}^2=\frac{8A}{\alpha^2C^{2-\alpha}}[(s_{z_l}-s_a)^{\alpha/2}+(s_b-s_{z_l})^{\alpha/2}]^2\leqslant Ml^{\alpha}.$$

定理 4　设 L 为封闭光滑曲线，$g(\omega,\zeta)\in H^{\alpha}(L)$（m. s.），且 $F(\omega,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{g(\omega,\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$，则有 Plemelj 公式为

$$F^{\pm}(\omega,\zeta_0)=\pm\frac{1}{2}g(\omega,\zeta_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{g(\omega,\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta,\qquad \zeta_0\in L.$$

其中：$F^{+}(\omega,\zeta_0)=\underset{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in D^{+}}}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$，$F^{-}(\omega,\zeta_0)=\underset{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in D^{-}}}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$.

证明　因为 $g(\omega,\zeta)\in H^{\alpha}(L)$（m. s.），所以 $\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}d\zeta$ 与 $\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\omega,z_L)}{\zeta-z}d\zeta$ 存在，则上式可改写为

$$F(\omega,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\omega,z_L)}{\zeta-z}d\zeta,$$

又有

$$\underset{z\to\zeta_0}{\mathrm{l.i.m}}\,F_2(\omega,z)=\underset{z\to\zeta_0}{\mathrm{l.i.m}}\,g(\omega,z_L)\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d\zeta}{\zeta-z}=g(\omega,\zeta_0)\underset{z\to\zeta_0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

则可得

$$F_2^{+}(\omega,\zeta_0)=g(\omega,\zeta_0),\qquad F_2^{-}(\omega,\zeta_0)=0.$$

下面证明

$$\underset{z\to\zeta_0}{\mathrm{l.i.m}}\,F_1(\omega,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta.$$

因为

$$E\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta\right|^2\right\}\leqslant$$

$$\frac{1}{16\pi^4}\left(E\left|\int_{L-L_\eta}\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{L-L_\eta}\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta\right|^2+\right.$$

$$\left.E\left|\int_{L_\eta}\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}d\zeta\right|^2+E\left|\int_{L_\eta}\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta\right|^2\right)^2=\frac{1}{16\pi^4}(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)^2.$$

由定理 3 可知，$\Delta_2\leqslant ML_\eta^{\alpha}$，$\Delta_3\leqslant ML_\eta^{\alpha}$. 对于任给的 $\varepsilon>0$，可取 η 充分小，使得 $\Delta_2<\sqrt{\varepsilon}/3$，$\Delta_3<\sqrt{\varepsilon}/3$. 此时固定 η，并要求 $|z-\zeta_0|<\eta/2$. 当 $\zeta\in L-L_\eta$ 时，$|\zeta-\zeta_0|>\eta$，从而有 $|\zeta-z|>\eta/2$.

令 $G(\omega,\zeta)=g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)$，易证 $G(\omega,\zeta)\in H^{\alpha}(L)$（m. s.）. 于是，根据三角不等式有

$$\Delta_1=E\left|\int_{L-L_\eta}\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{L-L_\eta}\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta\right|^2=$$

$$E\left|\int_{L-L_\eta}\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-z}d\zeta+\int_{L-L_\eta}\frac{g(\omega,\zeta_0)-g(\omega,z_L)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{L-L_\eta}\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta\right|^2=$$

$$E\left|\int_{L-L_\eta}\frac{[g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)](z-\zeta_0)}{(\zeta-z)(\zeta-\zeta_0)}d\zeta+[g(\omega,\zeta_0)-g(\omega,z_L)]\int_{L-L_\eta}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right|^2\leqslant$$

$$\left\{E\left|\int_{L-L_\eta}\frac{[g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)](z-\zeta_0)}{(\zeta-z)(\zeta-\zeta_0)}d\zeta\right|^2+E\left|[g(\omega,\zeta_0)-g(\omega,z_L)]\int_{L-L_\eta}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right|^2\right\}^2=$$

$$\left\{|z-\zeta_0|^2 E\left|\int_{L-L_\eta}\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{(\zeta-z)(\zeta-\zeta_0)}\mathrm{d}\zeta\right|^2+E|g(\omega,\zeta_0)-g(\omega,z_L)|^2\left|\int_{L-L_\eta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right|^2\right\}^2\leqslant$$

$$\left\{|z-\zeta_0|^2 E\left(\int_{L-L_\eta}|\mathrm{d}\zeta|\int_{L-L_\eta}\left|\frac{R_G(\zeta,\zeta')}{(\zeta-z)(\zeta-\zeta_0)\overline{(\zeta'-z)}\,\overline{(\zeta'-\zeta_0)}}\right||\mathrm{d}\bar{\zeta}'|\right)+\right.$$

$$\left.E|g(\omega,\zeta_0)-g(\omega,z_L)|^2\left|\int_{L-L_\eta}\frac{|\mathrm{d}\zeta|}{|\zeta-z|}\right)^2\right\}^2\leqslant$$

$$\left\{\frac{4ML^2}{\eta^4}|z-\zeta_0|^2+\frac{4L^2}{\eta^2}E|g(\omega,\zeta_0)-g(\omega,z_L)|^2\right\}^2.$$

由于 $z\to\zeta_0$, $g(\omega,z_L)\to g(\omega,\zeta_0)$,所以当 z 充分接近 ζ_0 时,可使上式 $\Delta_1<\sqrt{\varepsilon}/3$. 即有

$$\underset{z\to\zeta_0}{\mathrm{l.i.m}}\,F_1(\omega,z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\mathrm{d}\zeta,$$

$$\underset{z\to\zeta_0}{\mathrm{l.i.m}}\,F_1(\omega,z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\mathrm{d}\zeta-$$

$$\frac{g(\omega,\zeta_0)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2}g(\omega,\zeta_0),$$

$$F^{\pm}(\omega,\zeta_0)=F_1^{\pm}(\omega,\zeta_0)+F_2^{\pm}(\omega,\zeta_0)=\pm\frac{1}{2}g(\omega,\zeta_0)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\mathrm{d}\zeta,\qquad \zeta_0\in L.$$

推论 设 L 为封闭光滑曲线,$g(\omega,\zeta)\in H^\alpha(L)$(m. s.),则 $\forall\,\zeta_0\in L$,恒有

$$\underset{z\to\zeta_0}{\mathrm{l.i.m}}\;\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(\omega,\zeta)-g(\omega,\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\mathrm{d}\zeta,\qquad z\notin L.$$

参考文献:

[1] 王传荣. 随机奇异积分的存在定理[J]. 福州大学学报:自然科学版,2004,32(4):393-396.

[2] WANG Chuan-rong. Random singular integral of random process with second order moment[M]. Acta Mathematical Scientia,2005,25B(2):376-384.

[3] 武宝亭,李庆生,杨跃武. 随机过程与随机微分方程[M]. 北京:电子科技出版社,1994.

[4] 路见可. 解析函数边值问题[M]. 2 版. 武汉:武汉大学出版社,2004.

[5] 田铮,秦超英. 随机过程与应用[M]. 北京:科学出版社,2007.

[6] 林峰. Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数的边界极限[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2004,25(4):352-355.

Several Properties of Random Integral of Random Process with Second Order Moment

YAO Cun, LIN Feng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we discuss several properties of random integral of random process with second order moment. By these properties and the boundary value theory of analytic functions, we prove several new propreties and Plemelj formula of random singular integral with Cauchy kernal.

Keywords: second order moment; random integral; Cauchy kernal; Plemelj formula

(**责任编辑**: 陈志贤 **英文审校**: 张金顺, 黄心中)