

文章编号: 1000-5013(2011)04-0458-05

求非凸二次约束二次规划全局解的凸规划方法

田朝薇, 宋海洲

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 针对非凸二次约束二次规划(QCQP)问题,将问题中二次函数的凸函数部分保留,达到所得松弛规划的可行域更加紧致的目的,得到原问题更好的下界. 利用正交变换的方法得到原问题的一个凸规划松弛模型,再利用分支定界算法求其全局最优解. 根据问题的最优性和可行性原则,提出一种能整体删除或缩小算法迭代过程中产生的分割子区域的区域删减策略. 数值算例表明,算法及区域删减策略均是有效的.

**关键词:** 非凸; 二次约束二次规划; 全局解; 分支定界; 区域删减策略

**中图分类号:** O 221.2      **文献标志码:** A

考虑如下非凸二次约束二次规划(QCQP)的全局优化问题,有

$$\begin{cases} \min \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{x} + \mathbf{d}_0^T \mathbf{x} \\ \text{s. t. } \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x} + \mathbf{d}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, \quad i = 1, \cdots, m, \\ \mathbf{x} \in S = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \}. \end{cases}$$

其中: $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_i$  是  $n$  阶实对称矩阵; $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_i \in \mathbf{R}^n; b_i \in \mathbf{R}, i = 1, \cdots, m; \mathbf{l} = (l_1, \cdots, l_n)^T; \mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)^T$ . 对于 QCQP 问题中每个  $\mathbf{Q}_i$  均是凸时的凸二次规划问题,已有许多有效的求解算法<sup>[1-2]</sup>;而非凸 QCQP 问题是 NP-hard 的<sup>[3]</sup>. 近年来,对于该问题的研究,国内外已有一定的进展. 文献[4]利用 RLT(Reformulation Linearization Technique)方法,而文献[5]以此为基础,在其线性规划中加入半定规划,得到原问题的一个新的松弛模型,从而获得了原问题更好的下界. 文献[6]利用 D. C. 规划的方法求解该类问题;文献[7]利用参数线性化方法求其全局最优解;文献[8]在其基础上提出了一种加速方法;文献[9]将 QCQP 问题中二次函数的凸函数部分去掉,提出了一种新的线性化方法. 本文利用正交变换的方法,得到了非凸二次约束二次规划的一个凸规划松弛模型,并用分支定界算法求其全局最优解.

1 松弛凸规划及分支定界算法

假设  $S^k$  是  $S$  的任意子长方体且  $S^k = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{l}^k \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}^k \}$ . 其中: $\mathbf{l}^k = (l_1^k, \cdots, l_n^k)^T, \mathbf{u}^k = (u_1^k, \cdots, u_n^k)^T$ . 对于  $f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x} + \mathbf{d}_i^T \mathbf{x}, (i = 0, 1, \cdots, m)$ , 令  $\mathbf{x} = \mathbf{P}_i \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i = (y_{i,1}, \cdots, y_{i,n})^T, \mathbf{P}_i = (\mathbf{p}_{i,1}, \cdots, \mathbf{p}_{i,n}), \mathbf{p}_{i,j} \in \mathbf{R}^{n \times 1}, (j = 1, \cdots, n)$ ,使得  $\mathbf{P}_i^T \mathbf{P}_i = \mathbf{I}_n$ ,且  $\mathbf{P}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_i = \text{diag}(\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \cdots, \lambda_{i,n})$ . 其中: $\lambda_{i,1} \geq \lambda_{i,2} \geq \cdots \geq \lambda_{i,n}$  为  $\mathbf{Q}_i$  的  $n$  个特征值. 设前  $r_i$  个特征值大于等于 0,后  $n - r_i$  个特征值小于 0,则

$$f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x} + \mathbf{d}_i^T \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_{i,j} (y_{i,j})^2 + \sum_{j=r_i+1}^n \lambda_{i,j} (y_{i,j})^2 + \sum_{j=1}^n (\mathbf{d}_i^T \mathbf{p}_{i,j}) y_{i,j}, \quad i = 0, 1, \cdots, m.$$

由  $\mathbf{x} = \mathbf{P}_i \mathbf{y}_i$  可得

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{P}_i^T \mathbf{x} = (\mathbf{p}_{i,1}^T, \cdots, \mathbf{p}_{i,n}^T)^T \mathbf{x} = (\mathbf{p}_{i,1}^T \mathbf{x}, \cdots, \mathbf{p}_{i,n}^T \mathbf{x})^T = (y_{i,1}, \cdots, y_{i,n})^T.$$

取  $\bar{l}_{i,j}^k = \min\{ \mathbf{p}_{i,j}^T \mathbf{x} | \mathbf{l}^k \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}^k \}, \bar{u}_{i,j}^k = \max\{ \mathbf{p}_{i,j}^T \mathbf{x} | \mathbf{l}^k \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}^k \}$ , 则  $\bar{l}_{i,j}^k \leq y_{i,j} \leq \bar{u}_{i,j}^k$ . 因为当  $y_{i,j} \in [\bar{l}_{i,j}^k, \bar{u}_{i,j}^k]$  时,有

$$(\bar{l}_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j}^k)y_{i,j} - \frac{(\bar{l}_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j}^k)^2}{4} \leq (y_{i,j})^2 \leq (\bar{l}_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j}^k)y_{i,j} - \bar{l}_{i,j}^k \bar{u}_{i,j}^k.$$

$$\text{故有 } f_0(\mathbf{x}) \geq \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j} (y_{0,j})^2 + \sum_{j=r_0+1}^n \lambda_{0,j} [(\bar{l}_{0,j}^k + \bar{u}_{0,j}^k)y_{0,j} - \bar{l}_{0,j}^k \bar{u}_{0,j}^k] + \sum_{j=1}^n (d_0^T \mathbf{p}_{0,j}) y_{0,j} =$$

$$\mathbf{x}^T \left( \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j} \mathbf{p}_{0,j} \mathbf{p}_{0,j}^T \right) \mathbf{x} + \left[ \sum_{j=r_0+1}^n \lambda_{0,j} (\bar{l}_{0,j}^k + \bar{u}_{0,j}^k) \mathbf{p}_{0,j}^T + \sum_{j=1}^n (d_0^T \mathbf{p}_{0,j}) \mathbf{p}_{0,j}^T \right] \mathbf{x} - \sum_{j=r_0+1}^n \lambda_{0,j} \bar{l}_{0,j}^k \bar{u}_{0,j}^k = g_0^k(\mathbf{x}).$$

$$f_i(\mathbf{x}) \geq \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_{i,j} [(\bar{l}_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j}^k)y_{i,j} - \frac{(\bar{l}_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j}^k)^2}{4}] + \sum_{j=r_i+1}^n \lambda_{i,j} [(\bar{l}_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j}^k)y_{i,j} - \bar{l}_{i,j}^k \bar{u}_{i,j}^k] +$$

$$\sum_{j=1}^n (d_i^T \mathbf{p}_{i,j}) y_{i,j} = \left\{ \sum_{j=1}^n [\lambda_{i,j} (\bar{l}_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j}^k) + d_i^T \mathbf{p}_{i,j}] \mathbf{p}_{i,j}^T \right\} \mathbf{x} -$$

$$\left( \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_{i,j} \frac{(\bar{l}_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j}^k)^2}{4} + \sum_{j=r_i+1}^n \lambda_{i,j} \bar{l}_{i,j}^k \bar{u}_{i,j}^k \right) = g_i^k(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\text{令 } \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j} \mathbf{p}_{0,j} \mathbf{p}_{0,j}^T, \mathbf{a}_0^k = \sum_{j=r_0+1}^n \lambda_{0,j} (\bar{l}_{0,j}^k + \bar{u}_{0,j}^k) \mathbf{p}_{0,j}^T + \sum_{j=1}^n (d_0^T \mathbf{p}_{0,j}) \mathbf{p}_{0,j}^T, c_0^k = - \sum_{j=r_0+1}^n \lambda_{0,j} \bar{l}_{0,j}^k \bar{u}_{0,j}^k, \mathbf{t}_i^k =$$

$$\sum_{j=1}^n [\lambda_{i,j} (\bar{l}_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j}^k) + d_i^T \mathbf{p}_{i,j}] \mathbf{p}_{i,j}^T, c_i^k = - \left( \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_{i,j} \frac{(\bar{l}_{i,j}^k + \bar{u}_{i,j}^k)^2}{4} + \sum_{j=r_i+1}^n \lambda_{i,j} \bar{l}_{i,j}^k \bar{u}_{i,j}^k \right), i = 1, 2, \dots, m. \text{ 则可得}$$

$g_0^k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{a}_0^k \mathbf{x} + c_0^k, g_i^k(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_i^k \mathbf{x} + c_i^k, i = 1, 2, \dots, m.$  QCQP 问题的松弛规划(RQCQP)为

$$\begin{cases} \min g_0^k(\mathbf{x}), \\ \text{s. t. } g_i^k(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \mathbf{x} \in S^k = \{\mathbf{x} : \mathbf{l}^k \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}^k\}. \end{cases}$$

因为  $g_0^k(\mathbf{x})$  中的矩阵  $\mathbf{A}$  是半正定的,  $g_i^k(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 都是线性的, 故松弛规划 RQCQP 是一个凸规划. 显然, 若问题 QCQP( $S^k$ ) 和 RQCQP( $S^k$ ) 的最优值分别为  $v(S^k)$  和  $\mu(S^k)$ , 则  $v(S^k) \geq \mu(S^k)$ .

假定在算法的第  $k$  次迭代中,  $L_k$  表示可能存在全局最优解的子长方体构成的集合,  $\mu_k$  是 QCQP 问题最优值当前的下界,  $v_k$  是 QCQP 问题最优解的上界. 分支定界算法有如下 3 个步骤.

(1) 给定参数  $\epsilon > 0$ , 令  $k = 1, L_k = \{S\}, S^k = S, v_k = \infty$ , 求解问题 RQCQP( $S^k$ ). 设其最优解和最优值分别为  $\mathbf{x}_k$  和  $\mu(S^k)$ , 令  $\mu_k = \mu(S^k)$ , 若  $\mathbf{x}_k$  是 QCQP 问题的可行解, 则令  $v_k = f_0(\mathbf{x}_k)$ ; 若  $v_k - \mu_k \leq \epsilon$ , 则算法停止. 即  $\mathbf{x}_k$  是 QCQP 问题的最优解,  $v_k$  是最优值; 否则, 执行步骤(2).

(2) 沿垂直于  $S^k$  的最长边方向, 将  $S^k$  平分成两部分  $S^{k_r}$  ( $r = 1, 2$ ). 对任意  $r \in \{1, 2\}$ , 求解问题 RQCQP( $S^{k_r}$ ). 设其最优解和最优值分别为  $\mathbf{x}_{k_r}$  和  $\mu(S^{k_r})$ ; 若  $\mu(S^{k_r}) > v_k$ , 则删除  $S^{k_r}$ ; 否则,  $L_k = L_k \cup \{S^{k_r}\}$ ; 若  $\mathbf{x}_{k_r}$  是 QCQP 问题的可行解, 则令  $v_k = \min\{v_k, f_0(\mathbf{x}_{k_r})\}$ .  $L_k = L_k - \{S^k\}, \mu_k = \min\{\mu(\hat{S}) : \hat{S} \in L_k\}$ , 选择  $\mathbf{x}_k$  使得  $v_k = f_0(\mathbf{x}_k)$ .

(3) 令  $L_{k+1} = L_k - \{\hat{S} \in L_k : v_k - \mu(\hat{S}) \leq \epsilon\}$ , 若  $L_{k+1} = \emptyset$ , 则算法停止,  $v_k$  为 QCQP 问题的最优值,  $\mathbf{x}_k$  为其最优解; 否则,  $k := k + 1$ , 选取盒子  $S^k$ , 使得  $\mu(S^k) = \mu_k$ , 返回步骤(2).

## 2 区域删减策略及改进算法

为了方便, 对任意  $\mathbf{x} \in S^k = (S_j^k)_{n \times 1}, S_j^k = [l_j^k, u_j^k], (j = 1, 2, \dots, n)$ . 由前面可知, 问题 RQCQP( $S^k$ ) 的目标函数为  $g_0^k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{a}_0^k \mathbf{x} + c_0^k$ , 约束函数为  $g_i^k(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_i^k \mathbf{x} + c_i^k, i = 1, 2, \dots, m$ . 设 QCQP 问题最优值的当前上界为  $UB$ , 当  $\bar{l}_{0,j}^k \bar{u}_{0,j}^k \leq 0$  时,  $\min\{(y_{0,j})^2 | \bar{l}_{0,j}^k \leq y_{0,j} \leq \bar{u}_{0,j}^k\} = 0$ ; 否则,  $\min\{(y_{0,j})^2 | \bar{l}_{0,j}^k \leq y_{0,j} \leq$

$$\bar{u}_{0,j}^k\} = \min\{(\bar{l}_{0,j}^k)^2, (\bar{u}_{0,j}^k)^2\}.$$
 令  $rC_1 = \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j} \min_{j_{0,j}^k \leq y_{0,j} \leq u_{0,j}^k} \{y_{0,j}\}^2, rC_2 = \sum_{j=1}^n \min\{a_{0,j}^k l_j^k, a_{0,j}^k u_j^k\} + c_0^k, rLi =$

$$\sum_{j=1}^n \min\{t_{i,j}^k l_j^k, t_{i,j}^k u_j^k\} + c_i^k, i = 1, 2, \dots, m.$$

对于任意  $S^k \subseteq S$ , 可建立删减  $S^k$  中不含 QCQP 问题的全局最优解部分的区域删减策略<sup>[9]</sup>.

(1) 最优性策略. 计算  $rC_1$  和  $rC_2$ , 若  $rC_1 + rC_2 > UB$ , 删除  $S^k$  (令  $S^k = \emptyset$ ); 否则, 对任意  $j = 1, \dots,$

$n$ , 若  $a_{0,j}^k > 0$ , 令  $u_j^k = \min\{u_j^k, (UB - rC1 - rC2 + a_{0,j}^k l_j^k)/a_{0,j}^k\}$ ; 若  $a_{0,j}^k < 0$ , 令  $l_j^k = \max\{l_j^k, (UB - rC1 - rC2 + a_{0,j}^k u_j^k)/a_{0,j}^k\}$ .

(2) 可行性策略. 计算  $rL_i$ , 若  $rL_i > b_i$ , 删除  $S^k$  (令  $S^k = \phi$ ); 否则, 对任意  $j = 1, \dots, n$ , 若  $t_{i,j}^k > 0$ , 令  $u_j^k = \min\{u_j^k, (b_i - rL_i + t_{i,j}^k l_j^k)/t_{i,j}^k\}$ , 若  $t_{i,j}^k < 0$ , 令  $l_j^k = \max\{l_j^k, (b_i - rL_i + t_{i,j}^k u_j^k)/t_{i,j}^k\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

改进的分支定界算法有如下 3 个步骤.

(1) 给定参数  $\epsilon > 0$ , 令  $k = 1, L_k = \{S\}, S^k = S, v_k = \infty$ . 利用区域删减策略删减盒子  $S^k$ , 若  $S^k = \phi$ , 则 QCQP 问题无解, 算法停止; 否则, 求解问题 RQCQP( $S^k$ ). 其他过程与分支定界算法的步骤(1)相同.

(2) 沿垂直于  $S^k$  的最长边方向, 将  $S^k$  平分成两部分  $S^{k_r}$  ( $r = 1, 2$ ). 对于任意  $r \in \{1, 2\}$ , 利用区域删减策略删减盒子  $S^{k_r}$ , 若  $S^{k_r} \neq \phi$ , 则求解问题 RQCQP( $S^{k_r}$ ). 其他过程与分支定界算法的步骤(2)相同.

(3) 同分支定界算法的步骤(3).

3 算法收敛性

改进前后的分支定界算法均有如下收敛性定理.

**引理 1** 设  $S^k = \{x : l^k \leq x \leq u^k\}$ , 则  $f_0(x) - g_0^k(x) \leq \sum_{j=r_0+1}^n (-\lambda_{0,j})(\bar{u}_{0,j}^k - \bar{l}_{0,j}^k)^2$ , 且  $f_0(x) - g_0^k(x) \rightarrow 0, (k \rightarrow \infty)$ .

**证明** 因为有

$$\begin{aligned} 0 \leq f_0(x) - g_0^k(x) &= \sum_{j=r_0+1}^n \lambda_{0,j} [(y_{0,j})^2 - (\bar{l}_{0,j}^k + \bar{u}_{0,j}^k)y_{0,j} + \bar{l}_{0,j}^k \bar{u}_{0,j}^k] = \\ &= \sum_{j=r_0+1}^n \lambda_{0,j} (y_{0,j} - \bar{l}_{0,j}^k)(y_{0,j} - \bar{u}_{0,j}^k) \leq \sum_{j=r_0+1}^n (-\lambda_{0,j})(\bar{u}_{0,j}^k - \bar{l}_{0,j}^k)^2. \end{aligned}$$

同时, 设  $p_{0,j}^T \xi = \max_{x \in S^k} (p_{0,j}^T x), p_{0,j}^T \eta = \min_{x \in S^k} (p_{0,j}^T x)$ . 其中:  $\xi, \eta \in S^k, \delta(S^k)$  为盒子的直径. 则可得

$$\begin{aligned} |\bar{u}_{0,j}^k - \bar{l}_{0,j}^k| &= |\max_{x \in S^k} (p_{0,j}^T x) - \min_{x \in S^k} (p_{0,j}^T x)| = |p_{0,j}^T \xi - p_{0,j}^T \eta| = \\ &= |p_{0,j}^T (\xi - \eta)| \leq \|p_{0,j}^T\| \|\xi - \eta\| \leq \|p_{0,j}^T\| \delta(S^k). \end{aligned}$$

当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\delta(S^k) \rightarrow 0$ , 从而有  $|\bar{u}_{0,j}^k - \bar{l}_{0,j}^k| \rightarrow 0, f_0(x) - g_0^k(x) \rightarrow 0$ .

**定理 1** 假定 QCQP 问题的全局最优解存在, 则算法或者在有限步内求得 QCQP 问题的全局最优解, 或者算法产生的迭代序列  $\{x_k\}$  的极限点必为 QCQP 问题的全局最优解.

**证明** 若算法在有限步终止, 则结论是显然的, 因此假定算法产生一个无限迭代序列. 设  $x^*$  是序列  $\{x_k\}$  的一个聚点, 由于  $\{x_k\}$  是有界序列, 所以存在子序列  $\{x_{k_q}\}$  收敛到  $x^*$ . 由算法可知,  $\{v_k\}$  是单调递减有界序列,  $\{\mu_k\}$  是单调递增有界序列. 因此,  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \lim_{q \rightarrow \infty} v_{k_q}$ , 并且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \lim_{q \rightarrow \infty} \mu_{k_q}$ . 不妨设序列  $\{x_{k_q}\}$  对应的序列  $\{S^{k_q}\}$  满足  $S^{k_q} \supseteq S^{k_{q+1}}, q = 1, 2, \dots$ . 由于矩形二分法是穷举的, 即  $\lim_{q \rightarrow \infty} S^{k_q} = x^*$ , 由引理 1 可知

$$0 \leq v_{k_q} - \mu_{k_q} = f_0(x_{k_q}) - g_0^{k_q}(x_{k_q}) \leq \sum_{j=r_0+1}^n (-\lambda_{0,j})(\bar{u}_{0,j}^{k_q} - \bar{l}_{0,j}^{k_q})^2 \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty.$$

因此,  $\lim_{k \rightarrow \infty} (v_k - \mu_k) = \lim_{q \rightarrow \infty} (v_{k_q} - \mu_{k_q}) = 0$ , 从而有  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \lim_{q \rightarrow \infty} f_0(x_{k_q}) = f_0(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$ . 所以,  $x^*$  是原 QCQP 问题的最优解.

4 数值实验

例 1<sup>[9]</sup> 
$$\begin{cases} \min & -x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2, \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & -2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + x_2 \leq -4, \\ & x \in S = \{1 \leq x_1 \leq 6; 1 \leq x_2 \leq 6\}. \end{cases}$$

例 2<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} \min x_0, \\ \text{s. t. } 4x_1-4x_0^2\leqslant 1, \\ \qquad -x_0-x_1\leqslant -1, \\ \qquad \mathbf{x}\in S=\{0.01\leqslant x_0\leqslant 15;0.01\leqslant x_1\leqslant 15\}. \end{cases}$$

例 3

$$\begin{cases} \min x_1x_2-2x_1+x_2, \\ \text{s. t. } 8x_2^2-6x_1-16x_2\leqslant -11, \\ \qquad -x_2^2+3x_1+2x_2\leqslant 7, \\ \qquad \mathbf{x}\in S=\{1\leqslant x_1\leqslant 2.5;1\leqslant x_2\leqslant 2.225\}. \end{cases}$$

例 4

$$\begin{cases} \min -4x_2+(x_1-1)^2+x_2^2-10x_3^2, \\ \text{s. t. } x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 2, \\ \qquad (x_1-2)^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 2, \\ \qquad \mathbf{x}\in S=\{2-\sqrt{2}\leqslant x_1\leqslant \sqrt{2};-\sqrt{2}\leqslant x_2\leqslant \sqrt{2};-\sqrt{2}\leqslant x_3\leqslant \sqrt{2}\}. \end{cases}$$

为了验证算法的可行性,在内存 256 MB,866 MHz 的 Intel Pentium III 微机上,利用 Matlab 语言进行数值实验,结果如表 1 所示. 表 1 中:误差  $\epsilon$  为  $10^{-5}$ (下同).

表 1 例 1~4 的数值结果比较

Tab. 1 Comparison of numerical results

例子	分支定界算法		改进分支定界算法		最优解	最优值
	迭代次数	运行时间/s	迭代次数	运行时间/s		
例 1	20	3.765 0	1	0.270 0	(5.000 0,1.000 0)	-16.000 0
例 2	33	6.600 0	20	3.645 0	(0.5,0.5)	0.5
例 3	16	3.194 0	4	0.621 0	(2.000 0,1.000 0)	-1.000 0
例 4	346	61.449 0	128	22.643 0	(1.0,0.182 0,-0.983 3)	-10.363 6

例 5

$$\begin{cases} \min -\sum_{i=1}^n x_i^2, \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^j x_i\leqslant j, & j\in\{1,2,\cdots,n\}, \\ \qquad x_i\geqslant 0, & i\in\{1,2,\cdots,n\}. \end{cases}$$

利用分支定界算法对例 5 进行计算,结果如表 2 所示.

表 2 例 5 计算结果

Tab. 2 Results of example 5

$n$	5	10	30	50	100	150	200
迭代次数	1	1	1	1	2	2	2
运行时间/s	0.160	0.230	0.400	0.851	7.931	23.293	54.628

例 6

$$\begin{cases} \min \mathbf{x}^T\mathbf{Q}_0\mathbf{x}+\mathbf{d}_0^T\mathbf{x}, \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j^2+\mathbf{d}_k^T\mathbf{x}\leqslant b_k, & k=1,2,\cdots,m, \\ \qquad 0\leqslant x_i\leqslant 1, & i=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

其中:  $\mathbf{Q}_0,\mathbf{d}_0,\mathbf{d}_k$  的所有元素是随机选取的,取值范围分别为  $[-2,0]$ ,

$[-3,-2]$  和  $[1,5]$ ;  $a_{k,j},b_k$  的取值范围分别为  $[-2,0],[0,2],j=1,\cdots,n;k=1,\cdots,m$ . 对于每对  $(n,m)$ ,采用改进前后的分支定界算法分别随机运行 5 次,其平均值如表 3 所示.

给出的算法可以有效地求得 QCQP 问题的全局最优解及最优值. 对于例 5

表 3 例 6 的计算结果

Tab. 3 Results of example 6

$(n,m)$	分支定界算法		改进分支定界算法	
	迭代次数	运行时间/s	迭代次数	运行时间/s
(4,6)	101.0	22.226 0	30.8	7.839 2
(5,11)	337.2	88.697 6	131.0	36.494 6
(10,5)	804.5	194.472 3	368.0	93.359 3
(20,10)	3 323.7	1 282.100 0	412.0	167.040 0

的这种线性约束下的非凸二次规划问题,只需利用分支定界算法便可计算较大的规模.对于例 6 的随机问题,给出的两种算法均是有效的,并且改进的分支定界算法在迭代次数和运行时间方面均优于分支定界算法.

参考文献:

[1] YE Y Y. Approximating global quadratic programming with convex quadratic constraints[J]. Journal of Global Optimization,1999,15(1):1-17.

[2] KOZLOV M K,TARASOV S P,KHACHIYAN L G. Polynomial solvability of convex quadratic programming[J]. Dokl Akad Nauk SSSR,1979,248(5):1049-1051.

[3] PARDALOS P M,VAVASIS S A. Qadratic programming with one negative eigenvalue is NP-hard[J]. Global Optim,1991,1(1):15-22.

[4] SHERALI H D,TUNCBOLEK C H. A reformulation-convexification approach for solving nonconvex quadratic programming problems[J]. Global Optim,1995,7(1):1-31.

[5] ANSTREICHER K M. Semidefinite programming versus the reformulation-linearization technique for nonconvex quadratically constrained quadratic programming[J]. Glob Optim,2009,43(2/3):471-484.

[6] TIM V V,FAIZ A A. Difference of convex solution of quadratically constrained optimization problems[J]. European Journal of Operational Research,2003,148:349-362.

[7] QU Shao-jian,ZHANG Ke-cun,JI Ying. A global optimization algorithm using parametric linearization relaxation [J]. Applied Mathematics and Computation,2007,186(1):763-771.

[8] 吴慧卓,段东东,张可村. 一种新的求解带有非凸二次约束的非凸二次规划问题的加速全局优化方法[J]. 工程数学学报,2009,26(1):75-84.

[9] 申培萍,刘利敏. 带非凸二次约束二次规划问题全局解的线性化方法[J]. 高等学校计算数学学报,2008,30(3):261-267.

# A Convex Optimization Method for Global Optimal Solution of Quadratic Programming Problem with Non-Convex Quadratic Constraints

TIAN Zhao-wei, SONG Hai-zhou

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** In this paper, we obtain a sharper low bound by reserving the part of the convex function of the quadratic function for a non-convex quadratic programming with non-convex quadratic constraints (QCQP). The QCQP problem is first transformed into a convex quadratic programming with linear constraints by employing the orthogonal transformation and then the latter is solved by the branch-bound method. In order to improve the convergence of the proposed algorithm, two region-prunning techniques are given to delete or contract the sub-regions in which does not contain the optimal solutions of QCQP according to the optimality and feasibility of the problem. The numerical results show that the proposed algorithm and the prunning techniques are effective.

**Keywords:** non-convex quadratic programming; global optimization; branch-bound method; region-deleting rules

(责任编辑: 陈志贤      英文审校: 张金顺, 黄心中)