第 32 卷　第 4 期　　华侨大学学报（自然科学版）　　Vol. 32　No. 4
2011 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2011

文章编号：　1000-5013(2011)04-0453-05

某些单叶调和函数的稳定性

胡春英，黄心中

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要：　对于定义在区域 D 上的单叶调和映照 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，研究调和函数 $F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ 仍单叶的稳定性问题，以及常数 λ 的满足条件．此外，推广并得到一些单叶调和函数子类的稳定性结论.

关键词：　单叶调和函数；双向单叶；调和映照；线性连接；稳定性

中图分类号：　O 174.55　　**文献标志码：**　A

1　预备知识

一个复值函数 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 在平面区域 $D\subset C$ 上调和，是指 $u(z)$，$v(z)$ 在区域 D 上实调和. 如果 D 是一个单连通区域，则 f 可写为 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$. 其中：$h(z)$，$g(z)$ 为 D 上的解析函数. Lewy[1] 给出了 f 局部单叶且保向的充要条件为 $J_f=|h'|^2-|g'|^2>0, z\in D$.

一个区域 $D\subset C$ 具有 M 线性连接是指，如果存在一个正常数 M，使得对任意的 $z_1, z_2\in D$，都有一条连接 z_1, z_2 两点的曲线 $\gamma\subset D$，其弧长 $l(\gamma)$ 满足 $l(\gamma)\leqslant M|z_1-z_2|$. 文献[2]利用线性连接区域的性质，研究定义在单位圆 $U=\{z\,|\,|z|<1\}$ 上的调和函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 的稳定性问题．即 $f(z)$ 的单叶性与 $h(z)$ 的单叶性之间的关系，当 $f(z)$ 单叶时，$F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ 是单叶的条件和常数 λ 的取值.

定理 A　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆 U 上的保向单叶调和映照，且 $\Omega=f(U)$ 具有 M 线性连接，若 $\left|\dfrac{g'}{h'}\right|<\dfrac{1}{1+M}$，则 $h(z)$ 在 U 上单叶.

定理 B　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆 U 上的保向单叶调和映照，且 $\Omega=f(U)$ 具有 M 线性连接，若 $\left|\dfrac{g'}{h'}\right|<\dfrac{1}{1+2M}$，则 $F(z)=h(z)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\overline{g(z)}$ 在 U 上单叶($\theta\in[0,2\pi]$).

文献[3-4]都是关于稳定性问题的研究．吴瑞溢等[3] 推广了定理 B，得到下面的定理．

定理 C　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆 U 上的保向单叶调和映照，且 $\Omega=f(U)$ 具有 M 线性连接，若 $\left|\dfrac{g'}{h'}\right|<\dfrac{1}{1+2M}$，则 $F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ $(|\lambda|\leqslant 1)$ 在 U 上也单叶.

本文推广了文献[2-3]中的一些结论，并给出了一些单叶调和函数子类的稳定性.

1　主要结果和证明

将定理 A 和定理 C 的结论加以推广，得到如下定理．

定理 1　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆 U 上的保向单叶调和映照，且 $f(U)$ 具有 M 线性连接，则当 $\left|\dfrac{g'}{h'}\right|\leqslant k<\dfrac{1}{1+M}$，$|\lambda|<\dfrac{1}{M}(\dfrac{1}{k}-1)-1$ 时，$F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ 在 U 上保向单叶.

证明　$F=h+\lambda\bar{g}=f+(\lambda-1)\bar{g}$.

用反证法．假设 F 非单叶，即存在 $z_1, z_2\in U$，$z_1\neq z_2$，使得 $F(z_1)=F(z_2)$，则有

收稿日期：　2010-05-03

通信作者：　胡春英(1979-)，女，讲师，主要从事函数论的研究. E-mail：huchunying_79@sina.com.

基金项目：　福建省自然科学基金资助项目(2008J0195)；华侨大学科研基金资助项目(09HZR23)

$$f(z_2)-f(z_1)=(1-\lambda)(\overline{g(z_2)}-\overline{g(z_1)}).$$

令 $\zeta=f(z)$,$G=g\circ f^{-1}$,则上式可写为

$$\overline{\zeta_2-\zeta_1}=(1-\bar{\lambda})(G(\zeta_2)-G(\zeta_1)),\tag{1}$$

$$|\zeta_2-\zeta_1|=|1-\lambda||(G(\zeta_2)-G(\zeta_1)|.\tag{2}$$

另一方面,对方程 $f^{-1}(f(z))=z$ 两边同时关于 $z,\bar{z}$ 求偏导,可得 $(f^{-1})_\zeta\cdot h'+(f^{-1})_{\bar{\zeta}}\cdot g'=1$,$(f^{-1})_\zeta\cdot\bar{g}'+(f^{-1})_{\bar{\zeta}}\cdot\bar{h}'=0$. 即有 $(f^{-1})_\zeta=\dfrac{\bar{h}'}{|h'|^2-|g'|^2}$,$(f^{-1})_{\bar{\zeta}}=-\dfrac{\bar{g}'}{|h'|^2-|g'|^2}$. 因此有

$$G_\zeta=g'\cdot(f^{-1})_\zeta=\frac{g'\bar{h}'}{|h'|^2-|g'|^2},$$

$$G_{\bar{\zeta}}=g'\cdot(f^{-1})_{\bar{\zeta}}=-\frac{|g'|^2}{|h'|^2-|g'|^2}.$$

从而可得

$$|G_\zeta|+|G_{\bar{\zeta}}|=\frac{|g'|}{|h'|-|g'|}=\left|\frac{g'}{h'}\right|/\left[1-\left|\frac{g'}{h'}\right|\right].\tag{3}$$

当 $\left|\dfrac{g'}{h'}\right|\leqslant k<\dfrac{1}{1+M}$,$|\lambda|<\dfrac{1}{M}(\dfrac{1}{k}-1)-1$ 时,有

$$\left|\frac{g'}{h'}\right|/\left[1-\left|\frac{g'}{h'}\right|\right]\leqslant\frac{k}{1-k}<\frac{1}{M(1+|\lambda|)},$$

即得

$$|G_\zeta|+|G_{\bar{\zeta}}|<\frac{1}{M(1+|\lambda|)}.\tag{4}$$

因为 $f(U)$具有 M 线性连接,则存在一条连接 ζ_1,ζ_2 两点的曲线 $\gamma\subset f(U)$,使弧长 $l(\gamma)\leqslant|\zeta_2-\zeta_1|$,从而有

$$|G(\zeta_2)-G(\zeta_1)|\leqslant\int_\gamma(|G_\zeta|+|G_{\bar{\zeta}}|)|\mathrm{d}\zeta|<\frac{l(\gamma)}{M(1+|\lambda|)}\leqslant\frac{|\zeta_2-\zeta_1|}{(1+|\lambda|)}.\tag{5}$$

结合式(2)和式(5),可得

$$|\zeta_2-\zeta_1|<\frac{|1-\lambda|}{(1+|\lambda|)}|\zeta_2-\zeta_1|\leqslant|\zeta_2-\zeta_1|.\tag{6}$$

显然,式(6)矛盾,所以 $F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$在 U 上单叶.

又由于 $\left|\dfrac{F_{\bar{z}}}{F_z}\right|=|\lambda|\left|\dfrac{g'}{h'}\right|\leqslant|\lambda|k<\dfrac{1-(1+M)k}{M}<1$,保向. 定理得证.

在定理 1 中,如果 $f(U)$是凸区域,可取 $M=1$,则得到如下推论.

推论1[3] 若$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$为定义在单位圆$U$上的凸像调和$K-q\cdot c$,$k=(K-1)/(K+1)<1$,则当 $k<1/2$,$|\lambda|<1/k-2$ 时,$F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$为 U 上的单叶调和函数.

接下来分别给出一类凸像调和子类和一类星象调和子类的稳定性.

定理 2 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$是定义在单位圆 U 上的调和映照,$h(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n$,$g(z)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_nz^n$,若满足

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|+\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|\right)\leqslant 1,\qquad 0\leqslant\alpha<1,\tag{7}$$

则当$|\lambda|\leqslant\dfrac{2-\alpha}{1-\alpha}$时,$F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$在 U 上保向单叶.

证明 Jahangiri[5]证明了满足定理 2 条件的 $f(z)$在 U 上是保向单叶的 α 次凸像调和函数.

下面,证明 $F(z)$也是 U 上的保向单叶调和函数.

(1) 单叶性的证明. 对于 $\forall z_1,z_2\in U$,若 $z_1\neq z_2$,则有

$$|F(z_1)-F(z_2)|\geqslant|h(z_1)-h(z_2)|-|\lambda||g(z_1)-g(z_2)|=|(z_1-z_2)+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z_1^n-z_2^n)\,|-|\lambda||\sum_{n=2}^{\infty}b_n(z_1^n-z_2^n)|>|z_1-z_2|(1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|-|\lambda|\sum_{n=2}^{\infty}n|b_n|).$$

取 $v=\dfrac{1-\alpha}{2-\alpha}$，显然 $0<v\leqslant 1/2$. 因为有 $v\dfrac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}\geqslant n, v\dfrac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}\geqslant n$，其中 $n\geqslant 2$，所以有

$$|F(z_1)-F(z_2)|>|z_1-z_2|(1-\sum_{n=2}^{\infty}v\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|-|\lambda|\sum_{n=2}^{\infty}v\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|)\geqslant$$

$$|z_1-z_2|[1-v(1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|)-v|\lambda|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|]=$$

$$|z_1-z_2|[(1-v)+v(1-|\lambda|)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|].$$

当 $|\lambda|\leqslant\dfrac{2-\alpha}{1-\alpha}=1/v$ 时，有

$$|F(z_1)-F(z_2)|>|z_1-z_2|[(1-v)+v(1-\frac{1}{v})\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|]\geqslant$$

$$|z_1-z_2|[(1-v)+(v-1)]=0,$$

则 $F(z)$ 是单叶的.

(2) 保号性的证明．因为有

$$\left|\frac{g'}{h'}\right|=\frac{|\sum_{n=2}^{\infty}nb_nz^{n-1}|}{|1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}|}<\frac{\sum_{n=2}^{\infty}n|b_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|}\leqslant\frac{\sum_{n=2}^{\infty}v\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}v\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|}\leqslant$$

$$\frac{v(1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|)}{1-v\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|}=1-\frac{1-v}{1-v\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|}\leqslant 1-(1-v)=v,$$

所以有

$$\left|\frac{F_{\bar z}}{F_z}\right|=|\lambda|\left|\frac{g'}{h'}\right|<\frac{1}{v}\cdot v=1,$$

则 $F(z)$ 是保向的.

推论 2　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是定义在单位圆 U 上的调和映照，$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n$. 若满足 $\sum_{n=2}^{\infty}n^2(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1$，则当 $|\lambda|\leqslant 2$ 时，$F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ 也是 U 上的单叶调和映照.

推论 2 推广了文献[3]中定理 2 的结论.

定理 3　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是定义在单位圆 U 上的调和映照，$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$，若满足

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha-\alpha\beta(n-1)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha-\alpha\beta(n+1)}{1-\alpha}|b_n|\leqslant 1,\quad 0\leqslant\alpha<1,\quad 0\leqslant\beta\leqslant 1,\tag{8}$$

则当 $|\lambda|\leqslant\dfrac{2-\alpha-\alpha\beta}{2(1-\alpha)}$ 时，$F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ 在 U 上保向单叶.

证明　文献[6]中证明了满足定理 3 条件的 $f(z)$ 在 U 上是保向单叶的 α 次星像调和函数.

下面，证明 $F(z)$ 也是 U 上的保向单叶调和函数.

(1) 单叶性的证明．对于 $\forall z_1,z_2\in U$，若 $z_1\neq z_2$，则有

$$|F(z_1)-F(z_2)|\geqslant|h(z_1)-h(z_2)|-|\lambda||g(z_1)-g(z_2)|=|(z_1-z_2)+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_1^n - z_2^n) | - | \lambda | | \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z_1^n - z_2^n) | > | z_1 - z_2 | (1 - \sum_{n=2}^{\infty} n | a_n | - | \lambda | \sum_{n=1}^{\infty} n | b_n |).$$

取 $v=\dfrac{2(1-\alpha)}{2-\alpha-\alpha\beta}$，显然 $0<v\leqslant 1$. 因为 $v\dfrac{n-\alpha-\alpha\beta(n-1)}{1-\alpha}\geqslant n, n\geqslant 2$；$v\dfrac{n+\alpha-\alpha\beta(n+1)}{1-\alpha}\geqslant n, n\geqslant 1$，故有

$$| F(z_1) - F(z_2) | > | z_1 - z_2 | (1 - \sum_{n=2}^{\infty} v \frac{n - \alpha - \alpha\beta(n-1)}{1-\alpha} | a_n | -$$

$$| \lambda | \sum_{n=1}^{\infty} v \frac{n + \alpha - \alpha\beta(n+1)}{1-\alpha} | b_n |) \geqslant$$

$$| z_1 - z_2 | [1 - v(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \alpha - \alpha\beta(n+1)}{1-\alpha} | b_n |) - v | \lambda | \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \alpha - \alpha\beta(n+1)}{1-\alpha} | b_n |] =$$

$$| z_1 - z_2 | [(1 - v) + v(1 - | \lambda |) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \alpha - \alpha\beta(n+1)}{1-\alpha} | b_n |].$$

当 $|\lambda|\leqslant\dfrac{2-\alpha-\alpha\beta}{2(1-\alpha)}=1/v$ 时，有

$$| F(z_1) - F(z_2) | > | z_1 - z_2 | [(1 - v) + v(1 - \frac{1}{v}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \alpha - \alpha\beta(n+1)}{1-\alpha} | b_n |] \geqslant$$

$$| z_1 - z_2 | [(1 - v) + (v - 1)] = 0,$$

则 $F(z)$ 是单叶的.

(2) 保号性的证明. 因为有

$$\left|\frac{g'}{h'}\right| = \frac{| \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{n-1} |}{| 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} |} < \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n | b_n |}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n | a_n |} \leqslant$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} v \frac{n + \alpha - \alpha\beta(n+1)}{1-\alpha} | b_n |}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} v \frac{n - \alpha - \alpha\beta(n-1)}{1-\alpha} | a_n |} \leqslant \frac{v(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \alpha - \alpha\beta(n-1)}{1-\alpha} | a_n |)}{1 - v \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \alpha - \alpha\beta(n-1)}{1-\alpha} | a_n |} =$$

$$1 - \frac{1 - v}{1 - v \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \alpha - \alpha\beta(n-1)}{1-\alpha} | a_n |} \leqslant 1 - (1 - v) = v,$$

所以有

$$\left|\frac{F_{\bar{z}}}{F_z}\right| = | \lambda | \left|\frac{g'}{h'}\right| < \frac{1}{v} \cdot v = 1,$$

则 $F(z)$ 是保向的[6].

张兆功等[7]证明如下定理.

定理 D 设 $w=f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是一个单连通区域 D 上的保向单叶调和映照，则其反函数 $z=f^{-1}(w)$ 也调和的充要条件是

$$g'(z)h'(z)\overline{h''(z)} + \overline{h'(z)g'(z)}g''(z) = 0, \qquad z \in D. \tag{9}$$

定理 E 假设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是一个单连通区域 D 上的保向单叶调和映照，则其反函数 $z=f^{-1}(w)$ 在 $G=f(D)$ 内调和，当且仅当下列 3 种情形之一成立：

(i) $f(z)$ 在 D 内共形，即 $g(z)\equiv\text{const}$.

(ii) $f(z)$ 是仿射变换，即 $f(z)=\alpha z+\beta\bar{z}+\text{const}$. $|\alpha|>|\beta|>0$，

(iii) $f(z)$ 具有形式

$$f(z) = A[\alpha z + \beta + \log(1 - \mathrm{e}^{-\alpha z - \beta}) - \overline{\log(1 - \mathrm{e}^{-\alpha z - \beta})}] + \text{const}. \tag{10}$$

式(10)中：A,α,β 为常数，且满足条件 $A\neq 0,\alpha\neq 0,\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>0,z\in D$.

称反函数也调和的保向单叶调和映照为双向单叶调和映照，称具有式(10)形式的双向单叶调和映照为非平凡双向单叶调和映照. 不讨论情形(i)，(ii)，只对非平凡双向单叶调和映照的稳定性进行研究，

可得到如下结论.

定理 4　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是一个单连通区域 D 上的非平凡双向单叶调和映照，则有 $F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ 是 D 上的双向单叶调和映照，当且仅当 $\lambda=1$ 或者 $\lambda=0$，且 $h(z)$ 单叶两种情形之一成立.

(1) 必要性的证明. 假设 $F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ 是 D 上的双向单叶调和映照，由定理 D 可知，$F(z)$ 必然满足式(9)，即有

$$h'(z)\bar{\lambda}g'(z)\,\overline{h''(z)}+\overline{h'(z)\bar{\lambda}g'(z)}\bar{\lambda}g''(z)=0,\qquad z\in D. \tag{11}$$

因为 $f(z)$ 是 D 上的非平凡双向单叶调和映照，则式(9)成立. 所以，式(11)可写为

$$\bar{\lambda}(\lambda-1)\,\overline{h'(z)g'(z)}g''(z)=0,\qquad z\in D. \tag{12}$$

由于 $f(z)$ 保向，可得 $h'(z)\neq 0$，$z\in D$. 又因为 $f(z)$ 是非平凡的，由文献[7]的证明可知，存在 $z\in D$，使 $g''(z)\neq 0$，所以式(12)要成立，必须 $\bar{\lambda}(\lambda-1)=0$，即得到 $\lambda=1$ 或 $\lambda=0$. 当 $\lambda=0$ 时，$F(z)=h(z)$，由已知 $F(z)$ 是单叶的，可知 $h(z)$ 单叶.

(2) 充分性的证明. 当 $\lambda=1$ 时，$F(z)=f(z)$，由于 $f(z)$ 是非平凡双向单叶调和映照，所以 $F(z)$ 也是非平凡双向单叶调和映照. 当 $\lambda=0$ 且 $h(z)$ 单叶时，$F(z)=h(z)$ 也单叶，由定理 E 中的情形(i)可知，$F(z)$ 是双向单叶调和映照. 定理得证.

推论 3　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是一个单连通区域 D 上的非平凡双向单叶调和映照，则有 $F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ 是 D 上的非平凡双向单叶调和映照，当且仅当 $\lambda=1$.

参考文献:

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings [J]. Bull Amer Math Soc, 1936, 42: 689-692.

[2] CHUAQUI M, HERNÁNDEZ R. Univalent harmonic mappings and linearly connected domains[J]. J Math Anal Appl, 2007, 332(2): 1189-1194.

[3] 吴瑞溢，黄心中. 单叶调和函数的稳定性[J]. 漳州师范学院学报：自然科学版，2007，20(2)：11-15.

[4] 林珍连. 某些调和单叶函数的稳定性及系数估计[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2009，30(6)：718-719.

[5] JAHANGIRI J M. Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients[J]. Ann Univ Mariae Cruie-Sklodowska Sect, 1998, A52(2): 57-66.

[6] ÖZTÜRK M, YALCIN S, YAMANKARADENIZ M. Convex subclass of harmonic starlike functions [J]. Appl Math Comput, 2004, 154: 449-459.

[7] ZHANG Zhao-gong, LIU Li-quan. The inverse functions of univalent harmonic mappings[J]. Advances in Mathematics, 1996, 25(3): 270-276.

Stability of Some Univalent Harmonic Functions

HU Chun-ying, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: For univalent harmonic function $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ defined in a domain D, we investigate the problem of the stability that the harmonic function $F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ is also univalent and which condition the constant λ satisfies, and we also obtain some results for the stability of some subclasses of univalent harmonic functions.

Keywords: univalent harmonic functions; bilateral univalent; harmonic mappings; linearly connected; stability

(**责任编辑**：陈志贤　**英文审校**：张金顺，黄心中)