第 32 卷 第 4 期　　华侨大学学报（自然科学版）　　Vol. 32 No. 4
2011 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2011

文章编号： 1000-5013(2011)04-0447-06

一类泛函微分方程零解的全局吸引性

汪东树，王全义

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要： 通过不等式的推导，研究广义 Logistic 型泛函微分方程 $x'(t)+[1+x(t)]F(t,x[\cdot])=0$ 零解的全局吸引性．其中：$t\geqslant 0$，$0<\alpha\leqslant 1$ 且 α 为两正奇数之比，$F(t,\varphi)$ 是 $[0,+\infty)\times C_t$ 上的连续泛函．将所得到的结果运用到方程讨论中，改进并推广了其他文献的一些结果．

关键词： 广义 Logistic 型泛函微分方程；全局吸引性；振动；非振动

中图分类号： O 175　　**文献标志码：** A

1 基本概念

令 $g:[0,+\infty)$ 是一个非减的连续函数，且满足 $t(t)<t$，$t\geqslant 0$ 及 $g(t)\to+\infty(t\to+\infty)$．对任意 $t\geqslant 0$，用 C_t 表示连续函数 $\varphi:[g(t),t]\to[-1,+\infty)$ 的全体所构成的赋范空间，其范数定义为 $\|\varphi\|_t=\sup\limits_{s\in[g(t),t]}|\varphi(s)|$．文献[1]研究一维 Logistic 型泛函微分方程

$$x'(t)+[1+x(t)]F(t,x[\cdot])=0,\qquad t\geqslant 0 \tag{1}$$

零解的全局吸引性．其中：$F(t,\varphi)$ 是 $[0,+\infty)\times C_t$ 上的连续泛函，F 只依赖于 t 和 φ 在 $[g(t),t]$ 上的数值，$F(t,0)\equiv 0$，$t\geqslant 0$，且满足 Yorke 条件

$$-r(r)M_t(-\varphi)\leqslant F(t,\varphi)\leqslant r(t)M_r(\varphi),\qquad t\geqslant 0,\varphi\in C_t, \tag{2}$$

式(2)：$M_t(\varphi)=\max\{0,\sup\limits_{s\in[g(t),t]}\varphi(s)\}$，$r(t)\in C([0,+\infty),(0,+\infty))$．令 $\tau=-g(0)$，则式(1)相应的初始条件为

$$x(t)=\varphi(t),\qquad t\in[-\tau,0]. \tag{3}$$

其中：$\varphi\in([-\tau,0],[-1,+\infty))$ 且 $\varphi(0)>-1$．对于广义时滞 Logistic 方程

$$x'(t)+[1+x(t)](x(g(t)))^{\alpha})=0,\qquad t\geqslant 0, \tag{4}$$

式(4)中：$\alpha\geqslant 1$ 为两正奇数之比，$r(t)$，$g(t)$ 同前．容易看到，式(4)中的 $F(t,\varphi)=r(t)[\varphi(\cdot)]^{\alpha}$ 并不满足条件(2)．因此，方程(4)零解的全局吸引性问题应另行研究．文献[2-3]研究方程(4)在初始条件(3)下零解的全局吸引性问题．文献[4]研究了包括式(1)，(4)在内的更一般性的泛函微分方程

$$x'(t)+[1+x(t)]F(t,[x(\cdot)]^{\alpha})=0,\qquad t\geqslant 0. \tag{5}$$

式(5)中：α 同式(4)，$F(t,\varphi)$ 同式(1)．但是，到目前为止，对于式(5)而言，对 $0<\alpha<1$ 且 α 为两正奇数之比的全局吸引性问题，还没有相关文献报道这方面的结果．因此，本文研究泛函微分方程

$$x'(t)+[1+x(t)]F(t,[x(\cdot)]^{\alpha})=0,\qquad t\geqslant 0 \tag{6}$$

的零解全局吸引性问题．式(6)中：$0<\alpha\leqslant 1$ 且 α 为两正奇数之比，$F(t,\varphi)$ 同式(1)．

2 主要结果

引理 1[4] 设式(2)成立，式(5)，(3)的解 $x(t,0,\varphi)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在且满足 $x(t,0,\varphi)>-1$，$t\geqslant 0$．

定理 1 若式(2)成立，且对任一满足 $\varliminf\limits_{t\to+\infty}x(t)>0$ 的连续函数 $x:[0,+\infty)\to R$ 有

收稿日期： 2010-07-17

通信作者： 汪东树(1981-)，男，讲师，主要从事常微分及泛函微分方程的研究．E-mail：wangds@hqu.edu.cn．

基金项目： 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026)；国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

$$\int_0^{+\infty} F(s,[x(s)]^\alpha)\mathrm{d}s=+\infty, \qquad \int_0^{+\infty} F(s,[-x(s)]^\alpha)\mathrm{d}s=-\infty. \tag{7}$$

则方程(5)与式(3)的每个非振动解趋于零.

证明　设 $x(t)$ 为方程(5)与式(3)的某个非振动解. 若定理的结论不真，则分两种情况分别考虑.

(1) 若 $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} x(t)<0$，即 $\exists T_1>T$. 当 $t>T_1$ 时，有 $x(t)<0$. 由方程(5)有

$$1+x(t)=[1+\varphi(0)]\exp\left\{-\int_0^t F(s,[x(\cdot)]^\alpha)\mathrm{d}s\right\}.$$

在上式中，可令 $t\to+\infty$，由条件(7)有 $1+x(t)\to+\infty$. 与假设矛盾.

(2) 若 $\underline{\lim\limits_{t\to+\infty}} x(t)>0$，即 $\exists T_2>T$. 当 $t>T_2$ 时，有 $x(t)>0$. 由方程(5)有

$$1+x(t)=[1+\varphi(0)]\exp\left\{-\int_0^t F(s,[x(\cdot)]^\alpha)\mathrm{d}s\right\}.$$

在上式中，令 $t\to+\infty$，由条件(7)有 $1+x(t)\to 0$. 与假设矛盾.

于是，式(5)与式(3)的每个非振动解趋于零.

定理 2　若条件(7)和式(5)成立并满足

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\int_{g(t)}^t r(s)\mathrm{d}s\leqslant 3/2, \tag{8}$$

且不等式组

$$\left.\begin{aligned} \ln(1+x)&\leqslant y^\alpha-\frac{1}{6}y^{2\alpha},\\ -\ln(1-y)&\leqslant x^\alpha+\frac{1}{6}x^{2\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

在区域 $D=\{(x,y):x\geqslant 0,0\leqslant y<1\}$ 内只有唯一解 $(x,y)=(0,0)$，则式(5)与式(3)的每个解趋于零.

证明　设 $x(t)=x(t,0,\varphi)$ 是式(5)与式(3)的解. 由引理 1 可知，$x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在且满足对一切 $t\geqslant 0$，有 $x(t)>1$.

下面证明

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)=0. \tag{9}$$

由定理 1 可知，若 $x(t)$ 为非振动解时，式(9)成立，因此只需讨论 $x(t)$ 为振动解的情形.

首先，证明若 $x(t)$ 为振动解，则 $x(t)$ 有界. 令 $t_1>0$，使得当 $t\geqslant t_1$ 时，有 $g(t)\geqslant 0$. 另令 $t^*>t_1$ (t^* 充分大)是 $x(t)$ 的任一个局部左极大值点且 $x(t^*)>0$. 显然有 $x'(t^*)=0$. 然后，由式(5)可知，$F(t^*,[x(\cdot)]^\alpha)=0$. 下面证明存在 $t_0\in[g(t^*),t^*]$，使得 $x(t_0)=0$；否则，由前面的假设可知，当 $t\in[g(t^*),t^*]$ 时，有 $x(t)>0$.

由于 $x(t)$ 是振动的，由连续函数介值性定理可知，存在 $t^{**}<g(t^*)$，$(g(t^{**})>0)$，使得 $x(t^{**})=\frac{1}{2}x(g(t^*))$ 且当 $t\in[t^{**},g(t^*)]$ 时，有 $x(t)>0$. 故由式(2)可知，当 $t\in[t^{**},g(t^*)]$ 时，有

$$F(t,[x(\cdot)]^\alpha\geqslant 0. \tag{10}$$

方程(5)两端从 t^{**} 积分至 $g(t^*)$，有

$$1+x(g(t^*))=[1+x(t^{**})]\exp\left\{-\int_{t^{**}}^{g(t^*)} F(s,[x(\cdot)]^\alpha)\mathrm{d}s\right\}\leqslant 1+x(t^{**}). \tag{11}$$

这与假设 $x(t^{**})=\frac{1}{2}x(g(t^*))$ 相矛盾. 即存在 $t_0\in[g(t^*),t^*]$，使得

$$x(t_0)=0. \tag{12}$$

方程(5)两端从 t_0 积分至 t^*，可得

$$\ln[1+x(t^*)]=-\int_{t_0}^{t^*} F(s,[x(\cdot)]^\alpha)\mathrm{d}s\leqslant\int_{t_0}^{t^*} r(s)\mathrm{d}s. \tag{13}$$

由条件(11)可知，存在 $M>3/2$，使得对 $\forall\, t$ 有

$$\int_{g(t)}^t r(s)\mathrm{d}s\leqslant M. \tag{14}$$

于是，由式(13)和式(14)可得

$$x(t^*)\leqslant \exp(M)-1. \tag{15}$$

式(15)中，可设 t^* 充分大. 由于 t^* 的任意性，即证明了最终有

$$x(t)\leqslant \exp(M)-1.$$

下面令 $\bar{t}>t_1$ 是 $x(t)$的任一个局部左极小值点且 $x(\bar{t})<0$，显然有 $x'(\bar{t})=0$. 类似于式(12)的证明可知，存在 $s_0\in[g(t^*),t^*]$，使得 $x(s_0)=0$. 于是，可得

$$x(\bar{t})\geqslant -1+\exp[-M(\exp(M)-1)]. \tag{16}$$

式(16)中，可设 $\bar{t}$ 充分大. 由于 $\bar{t}$ 的任意性，即证明了最终有

$$x(t)\geqslant -1+\exp[-M(\exp(M)-1)].$$

其次，证明若 $x(t)$为振动解，则式(9)成立. 令 $u=\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}x(t)$，$v=-\underline{\lim\limits_{t\to+\infty}}x(t)$. 由前面的结论可知，$0\leqslant u\leqslant \exp(M)-1$，$0\leqslant v\leqslant 1-\exp[-M(\exp(M)-1)]$. 对任意的 $0<\varepsilon<1-v$，由式(11)可知存在 $t_2=t_2(\varepsilon)>0$，使得

$$\int_{g(t)}^{t}r(s)\mathrm{d}s\leqslant 3/2+\varepsilon,\qquad t\geqslant g(t_2), \tag{17}$$

$$-v_1\equiv -v-\varepsilon<x(t)<u+\varepsilon\equiv u_1,\qquad t\geqslant g(t_2). \tag{18}$$

再由式(2)，(5)和式(18)，可导出

$$\frac{x'(t)}{1+x(t)}\leqslant r(t)v_1^{\alpha},\qquad t\geqslant t_2. \tag{19}$$

$$\frac{x'(t)}{1+x(t)}\geqslant -r(t)u_1^{\alpha},\qquad t\geqslant t_2. \tag{20}$$

由于 $x(t)$为振动，不失一般性，可以取$\{s_n\}$是一个严格单调增加的序列，满足 $g(s_n)>t_2$，$x(s_n)=0$，且

$$\begin{cases}x(t)\geqslant 0, & t\in[s_{2n-1},s_{2n}],\\ x(t)\leqslant 0, & t\in[s_{2n},s_{2n+1}].\end{cases}$$

并且若记 $p_n\in(s_{2n-1},s_{2n})$，$q_n\in(s_{2n},s_{2n+1})$，使得

$$x(p_n)=\max\{x(t):s_{2n-1}\leqslant t\leqslant s_{2n}\},$$
$$x(q_n)=\min\{x(t):s_{2n}\leqslant t\leqslant s_{2n+1}\}.$$

对于 $n=1,2,\cdots$，不失一般性有

$$x(p_n)>0,\qquad x'(p_n)=0,\qquad x(q_n)<0,\qquad x'(q_n)=0. \tag{21}$$

类似式(12)的证明，可知存在 $\xi_n\in[g(p_n),p_n)$，使得 $x(\xi_n)=0$ 且 $x(t)>0$，$t\in(\xi_n,p_n]$. 对 $t_0\leqslant t\leqslant \xi_n$，由式(19)可得

$$x(t)\geqslant -1+\exp[-v_1^{\alpha}\int_{t}^{\xi_n}r(s)\mathrm{d}s],\qquad t_0\leqslant t\leqslant \xi_n. \tag{22}$$

当 $\xi_n\leqslant t\leqslant p_n$，时，由式(22)及式(2)可得

$$-F(t,[x(\cdot)]^{\alpha})\leqslant r(t)\max\{0,\sup_{s\in[g(t),t]}[-x(\cdot)]^{\alpha}\}\leqslant r(t)\max\{0,\sup_{s\in[g(t),\xi_n]}[-x(\cdot)]^{\alpha}\}\leqslant$$
$$r(t)[1-\exp\{-v_1^{\alpha}\int_{g(t)}^{\xi_n}r(s)\mathrm{d}s\}]^{\alpha}\leqslant r(t)[1-\alpha\exp\{-v_1^{\alpha}\int_{g(t)}^{\xi_n}r(s)\mathrm{d}s\}].$$

因此有

$$\frac{x'(t)}{1+x(t)}\leqslant \min\{r(t)v_1^{\alpha},r(t)[1-\alpha\exp\{-v_1^{\alpha}\int_{g(t)}^{\xi_n}r(s)\mathrm{d}s\}]\},\qquad \xi_n\leqslant t\leqslant p_n. \tag{23}$$

以下分两种情况进行讨论.

情况 1　$-\dfrac{\ln(1-v_1^{\alpha}/\alpha)}{v_1^{\alpha}}\leqslant\dfrac{3}{2}+\varepsilon.$

再分别考虑两种可能的子情况.

子情况 1　$\displaystyle\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s\leqslant -\frac{\ln(1-v_1^{\alpha}/\alpha)}{v_1^{\alpha}}\leqslant\frac{3}{2}+\varepsilon.$

此时,由式(17),(23)可得

$$\ln[1+x(p_n)]\leqslant\int_{\xi_n}^{p_n}r(t)[1-\alpha\exp\{-v_1^\alpha\int_{g(t)}^{\xi_n}r(s)\mathrm{d}s\}]\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\int_{\xi_n}^{p_n}r(t)[1-\alpha\exp\{-v_1^\alpha[\frac{3}{2}+\varepsilon-\int_{\xi_n}^{t}r(s)\mathrm{d}s]\}]\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha}{v_1^\alpha}[\exp\{-\frac{3+2\varepsilon}{2}v_1^\alpha+v_1^\alpha\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s\}-\exp\{-\frac{3+2\varepsilon}{2}v_1^\alpha\}]=$$

$$\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha}{v_1^\alpha}[1-\exp\{-v_1^\alpha\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s\}][\exp\{-v_1^\alpha(\frac{3+2\varepsilon}{2}-\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s)].\tag{24}$$

又由于函数 $f_1(x)=x-\frac{\alpha}{v_1^\alpha}[1-\exp\{-v_1^\alpha x\}][\exp\{-v_1^\alpha(\frac{3+2\varepsilon}{2}-x)\}]$在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}+\varepsilon$ 上严格递增，所以由式(24)可得

$$\ln[1+x(p_n)]\leqslant-\frac{\ln(1-v_1^\alpha/\alpha)}{v_1^\alpha}-\exp\{-v_1^\alpha[\frac{3+2\varepsilon}{2}+\frac{\ln(1-v_1^\alpha/\alpha)}{v_1^\alpha}]\}\leqslant$$

$$-\frac{(1-v_1^\alpha)\ln(1-v_1^\alpha/\alpha)}{v_1^\alpha}-1+\frac{3+2\varepsilon}{2}v_1^\alpha\leqslant$$

$$-\frac{(1-v_1^\alpha)\ln(1-v_1^\alpha)}{v_1^\alpha}-1+\frac{3+2\varepsilon}{2}v_1^\alpha\leqslant(1+\varepsilon)v_1^\alpha-\frac{1}{6}v_1^{2\alpha}.\tag{25}$$

上述不等式的推导中,应用了幂级数展开及不等式

$$\begin{cases}\ln(1-v_1^\alpha/\alpha)\geqslant\ln(1-v_1^\alpha),\\(1-v_1)\ln(1-v_1)\geqslant-v_1+\frac{1}{2}v_1^2+\frac{1}{6}v_1^3.\end{cases}$$

子情况 2 $-\frac{\ln(1-v_1^\alpha/\alpha)}{v_1^\alpha}<\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{3}{2}+\varepsilon.$

此时,必存在 $l_n\in(\xi_n,p_n)$,使得$\int_{l_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s\equiv-\frac{\ln(1-v_1^\alpha/\alpha)}{v_1^\alpha}$. 于是,由式(17),(23)可得

$$\ln[1+x(p_n)]\leqslant\int_{\xi_n}^{l_n}r(s)v_1^\alpha\mathrm{d}s+\int_{l_n}^{p_n}[1-\alpha\exp\{v_1^\alpha\int_{g(t)}^{\xi_n}r(s)\mathrm{d}s\}]\mathrm{d}t\leqslant$$

$$v_1^\alpha\int_{\xi_n}^{l_n}r(s)\mathrm{d}s+\int_{l_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s--\frac{\alpha}{v_1^\alpha}[1-\exp\{-v_1^\alpha\int_{l_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s\}]\times$$

$$\exp\{-v_1^\alpha[\frac{3+2\varepsilon}{2}-\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s]\}=$$

$$v_1^\alpha\int_{\xi_n}^{l_n}r(s)\mathrm{d}s+\int_{l_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s-\exp\{-v_1^\alpha[\frac{3+2\varepsilon}{2}-\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s]\}=$$

$$v_1^\alpha\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s+(1-v_1^\alpha)\int_{l_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s-\exp\{-v_1^\alpha[\frac{3+2\varepsilon}{2}-\int_{\xi_n}^{p_n}r(s)\mathrm{d}s]\}.\tag{26}$$

又由于函数 $v_1^\alpha x-\exp\{-v_1^\alpha[\frac{3+2\varepsilon}{2}-x]\}$在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3+2\varepsilon}{2}$上是严格单调增加的，故由式(26)可得

$$\ln[1+x(p_n)]\leqslant-\frac{(1-v_1^\alpha)\ln(1-v_1^\alpha/\alpha)}{v_1^\alpha}-1+\frac{3+2\varepsilon}{2}v_1^\alpha\leqslant(1+\varepsilon)v_1^\alpha-\frac{1}{6}v_1^{2\alpha}.\tag{27}$$

综合子情况 1,2，可以证明

$$\ln[1+x(p_n)]\leqslant(1+\varepsilon)v_1^\alpha-\frac{1}{6}v_1^{2\alpha},\qquad n=1,2,\cdots.\tag{28}$$

在式(28)中,令 $n\to+\infty$及 $\varepsilon\to0^+$,可得

$$\ln(1+u)\leqslant v^\alpha-\frac{1}{6}v^{2\alpha}.\tag{29}$$

情况 2 $-\frac{\ln(1+v_1)}{v_1}>\frac{3}{2}+\varepsilon.$

此时,类似于式(25)可得

$$\ln[1+x(p_n)]\leqslant v_1^{\alpha}-\frac{1}{6}v_1^{2\alpha},\qquad n=1,2,\cdots.\tag{30}$$

在式(30)中，令 $n\to+\infty$ 及 $\varepsilon\to0^+$，可得

$$\ln(1+u)\leqslant v^{\alpha}-\frac{1}{6}v^{2\alpha}.\tag{31}$$

综合情况 1,2，可以得到

$$\ln(1+u)\leqslant v^{\alpha}-\frac{1}{6}v^{2\alpha}.\tag{32}$$

下面证明

$$-\ln(1+v)\leqslant u^{\alpha}+\frac{1}{6}u^{2\alpha}.\tag{33}$$

通过前面式(21)的讨论，类似式(12)的证明，可知存在 $\eta_n\in[g(q_n),q_n)$，使得 $x(\eta_n)=0$ 且 $x(t)<0,t\in(\eta_n,q_n]$. 对 $t_0\leqslant t\leqslant\eta_n$，由式(20)可得

$$x(t)\leqslant-1+\exp[u_1^{\alpha}\int_t^{\eta_n}r(s)\mathrm{d}s],\qquad t_0\leqslant t\leqslant\eta_n.\tag{34}$$

当 $\eta_n\leqslant t\leqslant q_n$ 时，由式(34)及式(2)可得

$$-F(t,[x(\cdot)]^{\alpha})\geqslant-r(t)\max\{0,\sup_{s\in[g(t),t]}[-x(\cdot)]^{\alpha}\}\geqslant$$
$$-r(t)\max\{0,\sup_{s\in[g(t),\eta_n]}[-x(\cdot)]^{\alpha}\}\geqslant-r(t)u_1^{\alpha-1}[\exp\{u_1^{\alpha}\int_{g(t)}^{\eta_n}r(s)\mathrm{d}s\}-1].$$

因此有

$$-\frac{x'(t)}{1+x(t)}\leqslant\min\left\{r(t)u_1^{\alpha},r(t)u_1^{\alpha-1}[\exp\{u_1^{\alpha}\int_{g(t)}^{\eta_n}r(s)\mathrm{d}s\}-1]\right\},\qquad\eta_n\leqslant t\leqslant q_n.\tag{35}$$

下面分 3 种情况分别进行讨论.

情况 1 $\int_{\eta_n}^{q_n}r(s)\mathrm{d}s\leqslant1$.

由式(35)可得

$$-\ln[1+x(q_n)]\leqslant u_1^{\alpha}\int_{\eta_n}^{q_n}r(s)\mathrm{d}s\leqslant u_1^{\alpha}\leqslant u_1^{\alpha}+\frac{1}{6}u_1^{2\alpha}.\tag{36}$$

情况 2 $1<\int_{\eta_n}^{q_n}r(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{3+2\varepsilon}{2}-\frac{\ln(1+u_1^{\alpha})}{u_1^{\alpha}}$.

由于函数 $f_3(x)=\frac{3+2\varepsilon}{2}x-\ln(1+x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格增加且 $f_3(0)=0$，故由式(35)又可得

$$-\ln[1+x(q_n)]\leqslant u_1^{\alpha}\int_{\eta_n}^{q_n}r(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{3+2\varepsilon}{2}u_1^{\alpha}-\ln(1+u_1^{\alpha})\leqslant(1+\varepsilon)u_1^{\alpha}+\frac{1}{6}u_1^{2\alpha}.\tag{37}$$

情况 3 $\frac{3+2\varepsilon}{2}-\frac{\ln(1+u_1^{\alpha})}{u_1^{\alpha}}<\int_{\eta_n}^{q_n}r(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{3+2\varepsilon}{2}$.

必存在 $h_n\in(\eta_n,q_n)$，使得 $\int_{\eta_n}^{h_n}r(s)\mathrm{d}s=\frac{3+2\varepsilon}{2}-\frac{\ln(1+u_1^{\alpha})}{u_1^{\alpha}}$. 由式(35)可得

$$-\ln[1+x(q_n)]\leqslant u_1^{\alpha}\int_{\eta_n}^{h_n}r(s)\mathrm{d}s+\int_{h_n}^{q_n}r(t)u_1^{\alpha-1}[\exp\{u_1^{\alpha}\int_{g(t)}^{\eta_n}r(s)\mathrm{d}s\}-1]\mathrm{d}t=$$
$$u_1^{\alpha}\int_{\eta_n}^{h_n}r(s)\mathrm{d}s-\int_{h_n}^{q_n}r(t)u_1^{\alpha-1}\mathrm{d}t+\int_{h_n}^{q_n}r(t)u_1^{\alpha-1}\exp\{u_1^{\alpha}\int_{g(t)}^{\eta_n}r(s)\mathrm{d}s\}\mathrm{d}t=$$
$$u_1^{\alpha}\int_{\eta_n}^{h_n}r(s)\mathrm{d}s-\int_{h_n}^{q_n}r(t)u_1^{\alpha-1}\mathrm{d}t+\int_{h_n}^{q_n}r(t)u_1^{\alpha-1}[\exp\{\frac{3+2\varepsilon}{2}u_1^{\alpha}-u_1^{\alpha}\int_{\eta_n}^{t}r(s)\mathrm{d}s\}]\mathrm{d}t\leqslant$$
$$u_1^{\alpha}\int_{\eta_n}^{h_n}r(s)\mathrm{d}s-\int_{h_n}^{q_n}r(t)u_1^{\alpha-1}\mathrm{d}t+\frac{1}{u_1}\exp\{\frac{3+2\varepsilon}{2}u_1^{\alpha}\}\times$$
$$[\exp\{-u_1^{\alpha}\int_{\eta_n}^{h_n}r(s)\mathrm{d}s\}-\exp\{-u_1^{\alpha}\int_{\eta_n}^{q_n}r(s)\mathrm{d}s\}=$$
$$u_1^{\alpha}\int_{\eta_n}^{h_n}r(s)\mathrm{d}s-\int_{h_n}^{q_n}r(t)u_1^{\alpha-1}\mathrm{d}t+\frac{1}{u_1}\{1+u_1^{\alpha}-\exp\{u_1^{\alpha}[\frac{3+2\varepsilon}{2}-\int_{\eta_n}^{q_n}r(s)\mathrm{d}s]\}\}\leqslant$$

$$u_1^\alpha\int_{\eta_n}^{h_n}r(s)\mathrm{d}s-\int_{h_n}^{q_n}r(t)u_1^{\alpha-1}\mathrm{d}t+u_1^{\alpha-1}\leqslant u_1^{\alpha-1}\{(1+u_1)\int_{\eta_n}^{h_n}r(s)\mathrm{d}s+1-\frac{3+2\varepsilon}{2}\}=$$
$$-\frac{(1+u_1)\ln(1+u_1^\alpha)}{u_1}+1+\frac{3+2\varepsilon}{2}u_1^\alpha\leqslant-\frac{(1+u_1)\ln(1+u_1^\alpha)}{u_1^\alpha}+1+\frac{3+2\varepsilon}{2}u_1^\alpha. \tag{38}$$

又由于函数 $f_4(x)=(1+x)\ln(1+x)-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$ 在$[0,+\infty)$内严格增加且 $f_4(0)=0$,于是从式(38)有

$$-\ln[1+x(q_n)]\leqslant(1+\varepsilon)u_1^\alpha+\frac{1}{6}u_1^{2\alpha}. \tag{39}$$

综合以上3种情况,可以证明当 $u_1\geqslant1$ 时,有

$$-\ln[1+x(q_n)]\leqslant(1+\varepsilon)u_1^\alpha+\frac{1}{6}u_1^{2\alpha},\qquad n=1,2,\cdots. \tag{40}$$

在式(40)中,令 $n\to+\infty$ 及 $\varepsilon\to0^+$,即可得式(33). 于是,从式(32),(33)及引理1可知 $u=v=0$. 这就证明了当 $x(t)$是振动时,结论成立. 证毕.

由文献[1,4]可知,当 $\alpha=1$ 时,不等式组(12)在区域 D 内只有唯一解(0,0). 于是,有下面的推论.

推论1 当 $\alpha=1$ 时,在定理1成立的条件下,若 $\int_0^{+\infty}r(s)\mathrm{d}s=+\infty$ 成立,则式(5)与式(3)的每个解趋于0.

注1 推论1包含了目前关于 $\alpha=1$ 的很多结果[6].

注2 在证明中,$u=0$ 或 $v=0$ 这些特殊的情况没有考虑. 事实上,若 $u=0$ 或 $v=0$ 时,结论显然成立.

参考文献:

[1] 庾建设. 一类泛函微分方程零解的全局吸引性及应用[J]. 中国科学:A辑,1996,26(1):23-33.

[2] CHEN M,YU J,ZENG D,et al. Global attractivity in a generalized nonautonomous delay logistic equation[J]. Bulletin of Institute of Mathematics Academia Sinica,1994,22(2):91-99.

[3] LI Jing-wen. Global attractivity in a generalized delay logistic equation[J]. Appl Math JCU,1996,11(B):165-174.

[4] 王晓萍,廖六生. 广义Logistic型泛函微分方程零解的全局吸引性[J]. 应用数学学报,2004,27(1):172-179.

[5] 冯伟,段永瑞,燕居让. 一类非自治非线性时滞微分方程的全局吸引性[J]. 应用数学学报,2002,25(2):216-222.

[6] 唐先华,庾建设. Logistic型脉冲泛函微分方程零解的全局吸引性[J]. 数学学报,2002,25(5):941-952.

Global Attractivity of the Zero Solution of a Class of Functional Differential Equations

WANG Dong-shu, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Through the derivation of some inequlities, we study the global attractivity of the zero solution of the super Logistic type functional differential equatio. Where $t\geqslant0$, $0<\alpha\leqslant1$ and α is two positive prime quotient, $F(t,\varphi)$ is continuous function on $[0,+\infty)\times C_t$. Some new results are obtained, which inqorone and supplement some known result.

Keywords: super Logistic type functional differential equations; global attractivity; oscillation; nonoscillation

(**责任编辑**: 陈志贤 **英文审校**: 张金顺,黄心中)