

文章编号: 1000-5013(2011)04-0443-04

# 应用 Gibbs Sampler 的 GARCH 模型选择

汤丹, 赵昕东

(华侨大学 数量经济研究院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 为了解决候选模型较多,无法一一比较其准则值的问题,提出基于 Gibbs 样本生成器(Gibbs sampler)的广义自回归条件异方差(GARCH)模型的选择方法. 模拟实验结果表明:该模型选择方法可以高效、准确地从大量的候选模型中选出准则值最小的模型.

**关键词:** 广义自回归条件异方差模型模型; Gibbs 样本生成器; 准则值; 参数估计

**中图分类号:** O 211.62; F 224.0

**文献标志码:** A

在研究计量经济学中的经济问题时,必须建立恰当的时间序列模型. 如果模型建立之初,选择的变量较多,就会遇到不知如何舍去的问题. 尽管也有多种的检验方法,但当自变量的数量较大时,一般的检验方法缺乏效率,并且不能够保证找到最优的模型. 准则值的方法被认为是进行模型选择的较好的方法<sup>[1]</sup>. 准则值的方法比假设检验要求更少的约束条件<sup>[2]</sup>,当候选的模型的数量较多时,如模型中含有 16 个变量,那么候选模型的数量为  $2^{16} = 65\ 536$  个,计算它们的准则值,并且逐一地比较它们的准则值是不现实的. Gibbs 样本生成器(Gibbs sampler)是 Markov Chain Monte Carlo(MCMC)方法的一个特例<sup>[3-4]</sup>,由 S. Geman 和 D. Geman 于 1984 年首先提出,目前被广泛应用于各种统计问题的研究<sup>[5-7]</sup>. 基于 Gibbs sampler 的模型选择的方法,不需要逐一地比较所有候选模型的准则值. 本文应用 Gibbs sampler 进行模型选择,研究通货膨胀的波动性.

## 1 Gibbs Sampler 与 GARCH 模型选择

Gibbs sampler 的基本思想:仅需要考虑在给定初始值后单变量的条件分布,从而简化通常在模拟随机数时多元联合分布计算的复杂性. 即在生成  $N$  维随机变量的样本时仅需要生成  $N$  个单变量的条件分布的样本,而这些样本在满足条件时可以被看成是  $N$  维随机变量的联合分布的样本<sup>[4]</sup>.

Gibbs sampler 的具体算法如下. 设  $X = (X_1, \dots, X_n)$  的联合分布函数为  $f(X)$ , 它们的条件分布为  $f_1, \dots, f_n$ , 在给出起始点  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  后,假定第  $t$  次迭代开始时的估计值为  $x^{(t-1)}$ , 则第  $t$  次迭代分为如下  $n$  步:

$$\begin{aligned}x_1^{(t)} &\sim f_1(x_1 | (x_2^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)})); \\x_2^{(t)} &\sim f_2(x_2 | (x_1^{(t)}, x_3^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)})); \\&\vdots \\x_i^{(t)} &\sim f_i(x_i | (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_{i-1}^{(t)}; x_{i+1}^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)})); \\&\vdots \\x_n^{(t)} &\sim f_n(x_n | (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_{n-1}^{(t)})).\end{aligned}$$

记  $x^{(t)} = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_n^{(t)})$ , 则  $x^{(t)} = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_n^{(t)})$  是具有 Markov 链基本性质的实现值.  $x^{(t)}$  的分布收敛于联合分布  $f$ , 且  $x_i^{(t)}$  的分布收敛于  $f_i(x_i)$ , 当  $t$  足够大时,  $x_i^{(t)}$  从  $f_i(x_i)$  中得到有效样本点, 那么,  $x^{(t)}$  就是从  $f$  中得到的有效样本点.

**收稿日期:** 2010-11-16

**通信作者:** 赵昕东(1968-),男,教授,主要从事计算统计、计量经济学和宏观经济学的研究. E-mail: xzhao@hqu.edu.cn.

**基金项目:** 福建省自然科学基金资助项目(2009J01312)

条件分布  $f_1, \cdots, f_n$  是完全条件的, 它仅是模拟需要的概率分布, 这是 Gibber Sampler 的一个突出的特点. 这样, 尽管在处理高维问题的时候, 所有的问题都可以在单变量空间中解决.

GARCH 模型被广泛地应用于时间序列的波动性研究中, GARCH( $p, q$ )模型的具体形式为

$$y_t = x_t' \times \gamma + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \cdots, T, \tag{1}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2. \tag{2}$$

式(2)中:  $\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, E(\epsilon_t) = 0$ .

对于给定的全模型 GARCH( $p, q$ ), 有

$$\sigma_t^2 = \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \cdots \alpha_q \epsilon_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2. \tag{3}$$

假设式(1)已经根据信息准则选择出最优的模型, 候选模型的数量为  $2^{p+q}$  个. 模型选择就是要确定模型中取零的系数. 定义  $U_{1 \times q} = (u_1, \cdots, u_q)$  与  $V_{1 \times p} = (v_1, \cdots, v_p)$  分别对应  $(\alpha_1, \cdots, \alpha_q)$  与  $(\beta_1, \cdots, \beta_p)$ , 如果  $(\alpha_1, \cdots, \alpha_q)$  与  $(\beta_1, \cdots, \beta_p)$  中的元素不为零, 则  $U$  与  $V$  中对应的元素取值为 1, 否则取值为零.

设  $M$  为  $(U, V)$  中元素的所有的可能的组合的集合,  $\Psi = (u_1, \cdots, u_q; v_1, \cdots, v_p)$  代表任意一个备选模型, 其 AIC 和 BIC 信息准则共有的形式为

$$M_{SC}(u; v) = -2 \lg L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) + C(u; v),$$

式中:  $u, v$  为向量  $U$  和  $V$  中最后一个“1”的位置, 分别为 ARCH 阶数与 GARCH 阶数. 定义  $M$  上随机变量的概率分布为

$$P_{\lambda}(u; v) = \frac{\exp(-M_{SC}(u; v))}{\sum_{(u, v) \in M} \exp(-M_{SC}(u; v))},$$

式中:  $0 < \lambda < 1$  是起调节作用的参数.  $M$  中共有  $2^{p+q}$  个候选模型, 每个候选模型对应一个概率值. 通过  $P_{\lambda}$  的定义可知, 最优的模型具有较高的概率值; 同样, 具有较小的  $M_{SC}$  值的 GARCH 候选模型具有较高的  $P_{\lambda}$  的值.  $(u, v)$  服从伯奴里分布, 其中的每个元素可以取值为 1 或 0. 从  $P_{\lambda}$  决定的分布中产生一个随机样本, 具有相对较小  $M_{SC}$  值的模型比具有较大  $M_{SC}$  值的模型产生的早, 并且产生的频率较高. 即有

$$\begin{aligned} P\{(U; V)_k = 1 \mid (U; V)_{-k}\} = \\ P\{(U; V)_k = 1 \mid (U; V)_1, \cdots, (U; V)_{k-1}, (U; V)_{k+1}, \cdots, (U; V)_{p+q}\} = \\ \frac{\exp\{-\lambda M_{SC}(U; V)\} \mid_{(u; v)=1}}{\exp\{-\lambda M_{SC}(U; V)\} \mid_{(u; v)=1} + \exp\{-\lambda M_{SC}(U; V)\} \mid_{(u; v)=0}}, \end{aligned}$$

且 
$$P\{(U; V)_k = 0 \mid (U; V)_{-k}\} = 1 - P\{(U; V)_k = 1 \mid (U; V)_{-k}\}.$$

基于条件分布  $P\{(U; V)_k \mid (U; V)_{-k}\} (k=1, \cdots, p+q)$ , 应用 Gibbs sampler 产生一系列 GARCH 模型<sup>[4]</sup>. 在舍去最初的一部分样本后, 所得的序列近似的从  $P_{\lambda}$  得到的样本. 其算法有如下 3 个具体步骤.

(1) 任意的选取初值  $(U; V)^{(0)} = ((U; V)_1^{(0)}, \cdots, (U; V)_{p+q}^{(0)})$ , 例如  $(U; V)^{(0)} = \{1\}_{(p+q) \times 1}$ .

(2) 在已经产生  $(U; V)^{(1)}, \cdots, (U; V)^{(h-1)}$  的情况下, 重复  $k = p+q, p+q-1, \cdots, 2, 1$ , 并且从具有  $\{P\{(U; V)_k = 1 \mid (U; V)_1^{(h-1)}, \cdots, (U; V)_{k-1}^{(h-1)}, (U; V)_{k+1}^{(h)}, \cdots, (U; V)_{p+q}^{(h)}\}\}$  “成功”概率的 Bernoulli 分布中产生一个随机数; 然后, 更新  $(U; V)_k^{(h)}$ , 并产生  $(U; V)^{(h)}$ . 其中,  $h=1, \cdots, H$ .

(3) 重复步骤(2), 直到产生  $(U; V)^{(h+1)}, \cdots, (U; V)^{(p+q)}$ . 对包含常数项的 GARCH 模型进行选择, 如果包含常数项, 则相对应的位置为 1; 否则, 相对应的位置为 0.

2 模型的几点说明

(1) 序列  $(U; V)^{(1)}, \cdots, (U; V)^{(H)}$  是由 MCMC 方法产生的马尔科夫链, 这个序列就会经过一个预热期达到收敛. 决定何时收敛等价于是否相对应的  $M_{SC}$  值从某一点开始达到平稳, 至少有 10 种方法决定预热期的长度<sup>[8]</sup>. 在此模型中, 利用  $\chi^2$  检验来验证初始模型的稳定性, 生成模型的数量为初始模型的 105%, 再将前 5% 个模型去除.

(2) 在 Gibbs sampler 算法中, 更新  $(U; V)_k$  的顺序是从  $(p+q)$  到 1. 即在已产生模型 GARCH  $(U; V)^{(h-1)}$  的情况下, 首先更新  $(U; V)_{p+q}^{(h-1)}$  产生  $(U; V)_{p+q}^{(h)}$ , 直到更新  $(U; V)_1^{(h-1)}$ , 产生  $(U; V)_1^{(h)}$ . 原则上, 更新

的顺序不影响模型的选择结果,但实际情况下,它可能影响使产生的模型接近最好模型的速度.

(3) 调解作用的参数  $0<\lambda<1$  是用于调整 Gibbs sampler 算法的,以便产生的模型的数量恰当. 产生模型的数量与  $\lambda$  是负相关的. 如果  $\lambda$  过小,  $M_{sc}$  序列到达最小  $M_{sc}$  值的邻域较慢;如果  $\lambda$  的过大,  $M_{sc}$  序列可能越过最小的  $M_{sc}$  值.

(4) 提出的算法对 Gibbs sampler 进行一些修改,主要的修改是在 Gibbs sampler 的条件分布上,目的是样本的产生不陷入局部区域. 而且,算法对每个固定维数的已知的候选模型的参数估计与 Gibbs sampler 是分开进行的.

(5) 应用极大似然估计(MLE)方法对 GARCH 模型进行估计的时候存在一些困难. 主要的困难是参数的似然函数为高度非线性的,它将导致收敛的速度较慢,并且有时不能够收敛. 因此,对 GARCH 模型的估计不能够直接应用 S-PLUS 中的 Garch 语句,需要重新对 GARCH 模型的估计过程编写程序. 其次,对于某些结构的模型,最大似然函数可能由于不稳定或者是不可逆,导致不可以计算的,那么将跳出 Gibbs sampler 的模型选择程序.

### 3 模拟实验

为了验证算法的准确性,进行一组模拟实验,所用的计算程序由 S-plus8.0 软件编写. 生成一个 GARCH(5,3)的样本容量为 500 的序列,即

$$\sigma_t^2 = 0.9\epsilon_{t-1}^2 - 0.8\epsilon_{t-2}^2 + 0.4\epsilon_{t-3}^2 + 0.6\sigma_{t-1}^2 - 0.5\sigma_{t-2}^2 + 0.2\sigma_{t-4}^2 - 0.3\sigma_{t-5}^2.$$

假定全模型是 GARCH(8,8),则候选模型共有  $2^{16}=66\ 536$  个. 应用 MCMC 随机模型生成方法,以 AIC 值为选择模型的标准,采用最大似然估计对模型进行估计. 选取两个  $\lambda$  值分别生成随机模型 100, 300,600,800 个的情况下得到结果,如表 1 所示. 由表 1 可见,当  $\lambda=0.8$  时,结果比较好. 所以,在 GARCH 模型的选择中,选取  $\lambda=0.8$ .

表 1 不同  $\lambda$  值的随机模型生成结果  
Tab. 1 Results of stochastic models with different  $\lambda$  values

$\lambda$	生成随机模型的个数	出现次数最多模型出现的次数	出现次数最多模型出现的频率/%	出现次数最多模型的 AIC 值	出现次数最多模型的结构
0.4	100	15	15.0	2 249.61	(1,11011000,11100000)
	300	59	19.7	2 249.61	(1,11011000,11100000)
	600	148	24.7	2 249.61	(1,11011000,11100000)
	800	295	36.8	2 249.61	(1,11011000,11100000)
0.8	100	18	18.0	2 249.61	(1,11011000,11100000)
	300	68	22.6	2 249.61	(1,11011000,11100000)
	600	169	28.2	2 249.61	(1,11011000,11100000)
	800	315	39.3	2 249.61	(1,11011000,11100000)

### 4 实际应用

以通货膨胀的波动率 GARCH 模型为研究对象,中国居民消费价格指数 CPI 和货币供给量  $M_2$  均是同比数据,通货膨胀的变量  $\pi_t=100\times\ln(\text{CPI})$ . 数据资料来自中国信息经济网,时间跨度为 1995 年 1 月至 2020 年 6 月. 经过 ADF 检验,在 10%的水平下拒绝了单位根的假设,因此  $\pi_t$  是平稳的.

首先,用普通最小二乘法估计,根据 AIC 准则函数,得到的通货膨胀的自回归的最优的模型为

$$\pi_t = \gamma_1 \pi_{t-1} + \gamma_2 \pi_{t-3} + \epsilon_t.$$

对  $\epsilon_t$  是否存在 GARCH 现象,进行拉格朗日乘子检验,得出  $NR^2>\chi^2$  的临界值. 结果表明, $\epsilon_t$  存在 GARCH 现象.

其次,对  $\epsilon_t$  建立 GARCH(8,8)模型,以 AIC 为准则函数, $\lambda$  取 0.8,生成 400 次的候选模型. 模型结构(1,10110000,10001000)出现的次数最多,共出现了 84 次,出现的概率为 21%,其余候选模型出现的概率均为超过 10%. 因此,建立模型为

$$\sigma_l^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{l-1}^2 + \beta_3 \sigma_{l-3}^2 + \beta_4 \sigma_{l-4}^2 + \alpha_1 \epsilon_{l-1}^2 + \alpha_5 \epsilon_{l-5}^2.$$

用最大似然估计此 GARCH 模型,计算结果为

$$\begin{aligned} \pi_l &= 1.1\ 912\pi_{l-1} - 0.2\ 012\pi_{l-3} + \epsilon_l, \\ &\quad (28.678) \qquad (-5.255) \\ \sigma_l^2 &= 0.392 + 0.416\ 7\sigma_{l-1}^2 + 0.150\ 3\sigma_{l-3}^2 + 0.108\ 7\sigma_{l-4}^2 + 0.212\ 3\epsilon_{l-1}^2 + 0.097\ 1\epsilon_{l-5}^2. \\ &\quad (2.902) \quad (5.256) \qquad (3.563) \quad (2.912) \qquad (3.985) \quad (2.576) \end{aligned}$$

由此可见, $\alpha_i$  和  $\beta_j$  显著的不为零,且系数之和为  $0.985\ 1 < 1$ . 因而,GARCH(4,5)模型较好地拟合了通货膨胀序列. 从验证结果可以看出,中国的通货膨胀的现象基本符合该模型,模型是准确的.

5 结 束 语

提出的 Gibbs sampler 的 GARCH 模型选择,提高了模型选择的准确性,并且解决了由于变量过多而没有办法选择出最优模型的问题. 建立该模型的目的并非研究中国通货膨胀的波动率,仅为了证明 Gibbs sampler 算法在实际中也有一定的实际价值.

参考文献:

[1] CLAYTON M K,GEISSER S,JENNINGS D E. A comparison of several model selection procedures[C]// Bayesian Inference and Decision Techniques. New York:Elsevier Science Publisher,1986:199-212.  
[2] GRANGER C J W,KING M L,WHITE H. Comments on the testing economic theories and the use of model selection criteria[J]. Journal of Econometric,1995,67(1):173-187.  
[3] VERHOFEN M. Markov Chain Monte Carlo methods in financial econometrics[J]. Swiss Society for Financial Market Research,2005,19(4):397-40.  
[4] CMASELLA G,GEORGE E I. Explaining the Gibbs sampler[J]. The American Statistician,1992,46(3):167-174.  
[5] 赵昕东,耿鹏. 基于 Gibbs Sampler 的线性回归模型选择[J]. 宁波大学学报:人文科学版,2009,22(4):89-93.  
[6] 赵昕东,钱国骐. 基于吉布斯样本生成器的向量自回归模型选择[J]. 统计研究,2008,25(1):86-92.  
[7] 赵昕东. 基于蒙特卡洛-马尔科夫链(MCMC)的 ARMA 模型选择[J]. 数理统计与管理,2006,25(2):161-165.  
[8] GILKS W R,RICHARDSON S,SPIEGELHALTER D J. Intwducing Markov Chain Monte Carlo[M]. London: Chapman & Hall,1996:1-17.

GARCH Model Selecion Based on Gibbs Sampler

TANG Dan, ZHAO Xin-dong

(College of Economics and Finance, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of more candidate models that we can't compare the criterion values one by one, we put forward a selecting method of the GARCH (generalized auto-regressive conditional heteroskedasticity) model based on Gibbs sampler. The method establish a connection between criterion values of candidate models and probabilities of candidate models. When the number of the models generated becomes large enough, the model with the lowest criterion value will tend to appear early and frequently. The result shows that we can choose the model with the lowest criterion value, accurately and efficiently, from the candidate models.

**Keywords:** generalized auto-regressive conditional heteroskedasticity model; Gibbs sampler; criterion value; parameter estimation

(责任编辑: 陈志贤      英文审校: 司福成)