

文章编号: 1000-5013(2011)03-0356-05

可正定化矩阵的判别定理

陈恒新

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 对有关可正定化矩阵的理论做进一步的研究, 给出有关可正定化矩阵的充分必要性定理. 有关可正定化矩阵的主要判别定理是构造性的, 即相关的对角阵 D_0, D_* 是由矩阵 A 的元素确定构造的. 数值例子表明, 定理具有较好的实用性.

关键词: 可正定化矩阵; 判别定理; 充分必要性; 构造性

中图分类号: O 241.6

文献标志码: A

对于解线性方程组 $Ax=f$ 的许多迭代法, 当系数矩阵 A 正定时的收敛性定理可直接推广到 A 为可正定化矩阵^[1-4]. 关于可正定化矩阵, 文献[1-2]从理论上进行研究, 给出了一些相关定理及判定方法. 然而, 目前关于这一类问题的研究尚不够深入. 为此本文对有关可正定化矩阵的理论做进一步的研究, 给出了一些可正定化矩阵的充分必要性定理.

1 相关记号

为叙述简便, 先引入如下记号. n 阶实矩阵 $A=[a_{i,j}]$; 对角阵 $D=\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 若 $d_i > 0, i=1, 2, \dots, n$, 则称 D 为正对角阵; 集合 $N=\{1, 2, \dots, n\}$.

将矩阵 A 的所有顺序主子式记为 $\det A_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix}, k=1, 2, \dots, n$; 矩阵 A 的三对角矩阵记

为 $A_{\text{trd}} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & & & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1,n} & \\ 0 & & a_{n,n-1} & a_{n,n} & \end{vmatrix}$. 若 $A=[a_{i,j}]$ 的对角元 $a_{i,i} \neq 0, i=1, 2, \dots, n$, 取 $S = \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{pmatrix}$. 当 $a_{i,i} > 0$ 时, $s_i = 1$; 而当 $a_{i,i} < 0$ 时, $s_i = -1$. 记 $A_+ = SA, A_+$ 的主对角元全为正数.

2 可正定化矩阵的定义及判别定理

定义 1 若存在对角阵 P 和 Q 使 PAQ 为正定矩阵, 则称 A 为可正定化矩阵.

由文献[1]的定理 1, 2 可知有如下引理.

引理 1 n 阶矩阵 A 是可正定化矩阵的充分必要条件是存在对角阵 D , 使 DA 为正定矩阵.

收稿日期: 2009-12-16

通信作者: 陈恒新(1956-), 男, 副教授, 主要从事计算数学和数值代数的研究. E-mail: chenhx@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金计划资助项目(S0650018)

引理 2 n 阶矩阵 A 是可正定化矩阵的充分必要条件是存在正对角阵 D , 使 DA_+ 为正定矩阵.

显然, 由引理 1, 2 可知有如下引理.

引理 3 n 阶矩阵 A 是可正定化矩阵的充分必要条件是 A_+ 为可正定化矩阵.

由文献[3]的定理 5, 6 可知有如下引理.

引理 4 实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是, 它的所有顺序主子式 $\det A_k > 0, k=1, 2, \dots, n$.

引理 5 正定矩阵 A 的对角元素全都大于零. 对于 $A_+ = [\tilde{a}_{i,j}]$, 若 A_+ 的某一对对称元素异号, 即有

$$\tilde{a}_{i_0, j_0} \cdot \tilde{a}_{j_0, i_0} < 0, \quad i_0 \neq j_0. \quad (1)$$

对任正对角阵 D , DA_+ 非对称; 若不然, DA_+ 为对称矩阵. 因为 $DA_+ = [d_i \tilde{a}_{i,j}]$, 所以有 $d_{i_0} \tilde{a}_{i_0, j_0} = d_{j_0} \tilde{a}_{j_0, i_0}$, $d_{i_0} \tilde{a}_{i_0, j_0} \tilde{a}_{j_0, i_0} = d_{j_0} (\tilde{a}_{j_0, i_0})^2$. 因此有 $\tilde{a}_{i_0, j_0} \cdot \tilde{a}_{j_0, i_0} = \frac{d_{j_0}}{d_{i_0}} (\tilde{a}_{j_0, i_0})^2 > 0$. 这与式(1)矛盾.

显然, 若 $A_+ = [\tilde{a}_{i,j}]$ 的某一对对称元素 \tilde{a}_{i_0, j_0} 和 \tilde{a}_{j_0, i_0} ($i_0 \neq j_0$) 不同时为零 (即一个为零, 另一个非零), 则对任正对角阵 D , DA_+ 非对称.

若矩阵 A 有零对角元, 则 DA 亦有零对角元. 综上所述, 由引理 5 及引理 1, 2 可得如下定理.

定理 1 若 n 阶矩阵 A 有零对角元或其 A_+ 的某一对对称元素异号或不同时为零, 则 A 不是可正定化矩阵.

由引理 3 及定理 1 可知, 判别 n 阶矩阵 A 是否为可正定化矩阵, 只需考察相应的主对角元全为正的, 且有如下所定义的矩阵.

定义 2 若 n 阶矩阵 $A = [a_{i,j}]$ 的主对角元全为正, 即 $a_{i,i} > 1, i=1, 2, \dots, n$, 且 A 的对称元素 $a_{i,j}$ 与 $a_{j,i}$ ($i \neq j$), $i, j=1, 2, \dots, n$ 同号或同时为零. 即 $a_{i,j}a_{j,i} \geq 0$ 且 $a_{i,j}a_{j,i} = 0$, 当且仅当 $a_{i,j} = a_{j,i} = 0$, 则记为 $A \in S^+$.

引理 6 设 n 阶矩阵 $A = [a_{i,j}]$ 中存在某一个 $l \in \mathbf{N}$, 使得 $a_{l,j} = a_{j,l} \neq 0, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$. 若 A 不是对称矩阵, 则对任非奇异对角阵 D , DA 不是对称矩阵.

证明 因为 A 是非对称矩阵, 则必存在 $i_0 \neq j_0$, 使 $a_{i_0, j_0} \neq a_{j_0, i_0}$.

反证 若存在非奇异对角阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 使 $DA = [da_{i,j}]$ 为对称矩阵, 则有 $d_l a_{l,j} = d_j a_{j,l}, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$. 因 $a_{l,j} = a_{j,l} \neq 0, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$, 所以有 $d_l = d_j, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$. 即有 $d_1 = d_2 = \dots = d_n \stackrel{\text{记}}{=} d$.

于是有 $D = \text{diag}(d, d, \dots, d), d \neq 0$. 因此, $DA = [da_{i,j}]$. 由于 DA 为对称阵, 则有 $da_{i_0, j_0} = da_{j_0, i_0}$, 故可得 $a_{i_0, j_0} = a_{j_0, i_0}$ 与 $a_{i_0, j_0} \neq a_{j_0, i_0}$ 矛盾.

所以可知, 不存在非奇异对角阵 D , 使 DA 为对称矩阵. 证毕.

假设 $A = [a_{i,j}]$ 中存在 $a_{i,j} \neq 0, a_{j,l} \neq 0, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$, 则对于非奇异对角阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $DA = \tilde{A} = [\tilde{a}_{i,j}] = [d_i a_{i,j}]$. 其中: $\tilde{a}_{l,j}, \tilde{a}_{j,l} \neq 0$. 由于 $\tilde{a}_{l,j} = \tilde{a}_{j,l}, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$, 所以有 $d_l a_{l,j} = d_j a_{j,l}, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$. 于是有 $d_j = \frac{a_{l,j}}{a_{j,l}} d_l$. 若取 $d_l = 1$, 则有 $d_j = \frac{a_{l,j}}{a_{j,l}}, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$. 若 $a_{l,j}a_{j,l} > 0$, 则 $d_j > 0, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$. 即有如下引理.

引理 7 设 n 阶矩阵 $A = [a_{i,j}]$ 中存在 $a_{l,j} \neq 0, a_{j,l} \neq 0, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$ (l 为 \mathbf{N} 中的某一个数). 令 $D_0 = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. 其中: $d_l = 1, d_j = \frac{a_{l,j}}{a_{j,l}}, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$. 因此, D_0 非奇异, 且矩阵 $D_0 A = [\tilde{a}_{i,j}]$ 中有 $\tilde{a}_{l,j} = \tilde{a}_{j,l} \neq 0, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$. 其次, 如果 A 中的这一对称元素 $a_{l,j}, a_{j,l}$ 同号, 即 $a_{l,j}a_{j,l} > 0, j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$, 则 D_0 为正对角阵.

引理 8 设 D 为正对角阵, $\tilde{A} = DA$, 则 $\det \tilde{A}_k = \det (DA)_k > 0 (1 \leq k \leq n)$ 等价于 $\det A_k > 0 (1 \leq k \leq n)$; $\det \tilde{A}_k = \det (DA)_k \leq 0 (1 \leq k \leq n)$ 等价于 $\det A_k \leq 0 (1 \leq k \leq n)$.

证明 因为 $\tilde{A} = DA = [d_i a_{i,j}]$, 所以有

$$\det A_k = \begin{vmatrix} d_1 a_{1,1} & \cdots & d_1 a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ d_k a_{k,1} & \cdots & d_k a_{k,k} \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_k \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_k \det \tilde{A}_k.$$

又由已知有 $d_1 d_2 \cdots d_k > 0$, 可知引理 8 成立. 证毕.

定理 2 设 n 阶矩阵 $A \in S^+$, 且 $A = [a_{i,j}]$ 中存在 $a_{l,j} \neq 0, a_{j,l} \neq 0, j = 1, 2, \dots, n$ (l 为 \mathbf{N} 中的某一个数), 则 A 为可正定化矩阵的充分必要条件是 $D_0 A$ 为正定矩阵, 而 D_0 与引理 7 中 $D_0 = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 所确定的对角阵相同.

证明 因 $A \in S^+$, 可知 D_0 为正对角阵, 且矩阵 A 相应的 $A_+ = A$.

充分性. 若 $D_0 A$ 为正定矩阵, 由引理 2 可知 A 是可正定化矩阵.

必要性. 若 A 是可正定化矩阵.

反证 假设 $D_0 A$ 不是正定矩阵, 则有下列 2 种情况.

(1) $D_0 A$ 为非对称矩阵. 根据已知的条件, 由引理 7 可知 $\tilde{A} = D_0 A = [\tilde{a}_{i,j}]$ 中有 $\tilde{a}_{l,j} = \tilde{a}_{j,l} \neq 0, j = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$.

因为 D_0 为正对角阵, 可知 $\tilde{A} = D_0 A$, 相应的 $\tilde{A}_+ = \tilde{A}$. 而由于 A 是可正定化矩阵, 由引理 2 可知必存在某一正对角阵 D , 使 $DA_+ = DA$ 为正定矩阵. 令 $\tilde{D} = DD_0^{-1}$, 则 \tilde{D} 亦为正对角阵, 从而非奇异, 且有 $D = \tilde{D}D_0$. 于是有 $DA = \tilde{D}D_0 A = \tilde{D}(\tilde{A}) = \tilde{D}\tilde{A}$. 即 $\tilde{D}\tilde{A} = DA$ 为正定矩阵, 从而 $\tilde{D}\tilde{A}$ 为对称阵.

但由于 $\tilde{A} = D_0 A$ 为非对称矩阵, 且 \tilde{A} 中有 $\tilde{a}_{l,j} = \tilde{a}_{j,l} \neq 0, j = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n$ 存在. 由引理 6 可知, 对此 $\tilde{D}, \tilde{D}\tilde{A}$ 不是对称矩阵, 矛盾. 所以 $\tilde{A} = D_0 A$ 为对称矩阵. 即情况 (1) 不可能出现.

(2) $D_0 A$ 为对称矩阵, 但 $D_0 A$ 不为正定矩阵.

由引理 4 可知, 必存在某一个 k , 使 $\det(D_0 A)_k \leq 0, 1 \leq k \leq n$. 因 D_0 为正对角阵, 由引理 8 可知有 $\det A_k \leq 0, 1 \leq k \leq n$. 但因 A 是可正定化矩阵, 由引理 2 可知, 必存在正对角阵 D 使 $DA_+ = DA$ 为正定矩阵. 于是, 由引理 4 可知有 $\det(DA)_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$. 又由引理 8 可知有 $\det A_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$. 这与 $\det A_k \leq 0, 1 \leq k \leq n$ 矛盾. 即情况 (2) 亦不可能出现. 因此, 可知 $D_0 A$ 为正定矩阵. 证毕.

引理 9 假设 n 阶矩阵 A 的三对角矩阵 A_{trd} 为两条斜对角线元素皆不为零的对称阵. 即 $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$. 若 A 不是对称矩阵, 则对任非奇异对角阵 D , DA 不是对称矩阵.

证明 因 A 为非对称矩阵, 则必存在 $i_0 \neq j_0$, 使 $a_{i_0 j_0} \neq a_{j_0 i_0}$.

反证 若存在非奇异对角阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 使 $DA = [\tilde{a}_{i,j}] = [d_i a_{i,j}]$ 为对称矩阵, 则有 $\tilde{a}_{i,i+1} = \tilde{a}_{i+1,i}, i = 1, 2, \dots, n-1$. 即 $d_i a_{i,i+1} = d_{i+1} a_{i+1,i}, i = 1, 2, \dots, n-1$. 因 $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$, 所以有 $d_i = d_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$. 即有 $d_1 = d_2 = \dots = d_n \stackrel{\text{记}}{=} d$.

于是有 $D = \text{diag}(d, d, \dots, d), d \neq 0$, 故 $DA = [da_{i,j}]$. 因为 DA 为对称矩阵, 则有 $da_{i_0 j_0} = da_{j_0 i_0}$, 由此可得 $a_{i_0 j_0} = a_{j_0 i_0}$ 与 $a_{i_0 j_0} \neq a_{j_0 i_0}$ 矛盾. 所以可知, 不存在非奇异对角阵 D 使 DA 为对称矩阵. 证毕.

设 $A = [a_{i,j}]$ 的三对角矩阵 A_{trd} 中两条斜对角线元素皆不为零, 即有 $a_{i,i+1} \neq 0, a_{i+1,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$. 对于非奇异对角阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 有 $DA = \tilde{A} = [\tilde{a}_{i,j}] = [d_i a_{i,j}]$. 其中: $\tilde{a}_{i,i+1} \neq 0, \tilde{a}_{i+1,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$. 由于 $\tilde{a}_{i,i+1} = \tilde{a}_{i+1,i}, i = 1, 2, \dots, n-1$, 可知 $d_i a_{i,i+1} = d_{i+1} a_{i+1,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$, 则有 $d_{i+1} = d_i \frac{a_{i,i+1}}{a_{i+1,i}}, i = 1, 2, \dots, n-1$. 如果取 $d_1 = 1$, 则有 $d_2 = a_{1,2}/a_{2,1}, d_3 = d_2 a_{2,3}/a_{3,2}, d_4 = d_3 a_{3,4}/a_{4,3}, \dots, d_n = d_{n-1} a_{n-1,n}/a_{n,n-1}$. 又若 $a_{i,i+1} \neq 0, a_{i+1,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ 中 $a_{i,i+1} \cdot a_{i+1,i} > 0$, 则 $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n-1$. 于是有如下引理.

引理 10 假设 n 阶矩阵 A 的三对角矩阵 A_{trd} 中两条斜对角线元素皆不为零, 即 $a_{i,i+1} \neq 0, a_{i+1,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$.

令 $D_* = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. 其中: $d_1 = 1, d_2 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}}, d_3 = d_2 \frac{a_{2,3}}{a_{3,2}}, d_4 = d_3 \frac{a_{3,4}}{a_{4,3}}, \dots, d_n = d_{n-1} \frac{a_{n-1,n}}{a_{n,n-1}}$. 则 D_* 非奇异, 且矩阵 $D_* A = [\tilde{a}_{i,j}]$ 的三对角阵 $(D_* A)_{\text{trd}}$ 为两条斜对角线元素皆不为零的对称阵, 即 $\tilde{a}_{i,i+1} = \tilde{a}_{i+1,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$.

其次, 若 $a_{i,i+1} \neq 0, a_{i+1,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ 中 $a_{i,i+1} \cdot a_{i+1,i} > 0$, 则 D_* 为正对角阵.

据引理 9, 10 及相关引理, 完全类似定理 2 的证明, 便有下列定理.

定理 3 设 n 阶矩阵 $A \in S^+$, 且 A 的三对角矩阵 A_{trd} 中两条斜对角线元素皆不为零, 即 $a_{i,i+1} \neq 0, a_{i+1,i} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$. 则 A 是可正定化矩阵的充分必要条件, $D_* A$ 为正定矩阵. 其中: D_* 同引理

10 中 $\mathbf{D}_* = \text{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 所确定的对角阵.

3 数值例子

在应用定理 2 时,注意到 $\mathbf{D}_0 \mathbf{A} = [\tilde{a}_{i,j}] = [d_i a_{i,j}]$ 中有 $\tilde{a}_{j,l} = \tilde{a}_{l,j}, j = 1, 2, \cdots, l-1, l, l+1, \cdots, n$, 见引理 7 的式(3). 于是有 $\tilde{a}_{j,l} = \tilde{a}_{l,j} = a_{l,j}, j = 1, 2, \cdots, n$. 据此可简化 $\mathbf{D}_0 \mathbf{A}$ 的计算.

例 1 判别矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 18 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ 是否为可正定化矩阵.

显然, $\mathbf{A} \in \mathbf{S}^+$, 且 \mathbf{A} 中的 $a_{1,j}, a_{j,1} \neq 0, j = 1, 2, 3$. 取 $l = 1, d_1 = 1, d_2 = a_{1,2}/a_{2,1} = 1/3, d_3 = a_{1,3}/a_{3,1} = 3/1 = 3$, 则 $\mathbf{D}_0 = \text{diag}(1, 1/3, 3)$. 于是, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}_0 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & \tilde{a}_{2,2} & \tilde{a}_{2,3} \\ 3 & \tilde{a}_{3,2} & \tilde{a}_{3,3} \end{pmatrix}$, 而 $\begin{pmatrix} \tilde{a}_{2,2} & \tilde{a}_{2,3} \\ \tilde{a}_{3,2} & \tilde{a}_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \\ & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 6 \\ 6 & 30 \end{pmatrix}$, 可得 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}_0 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{4}{3} & 6 \\ 3 & 6 & 30 \end{pmatrix}$ 为对称阵.

又因 \mathbf{A} 的 $\det \mathbf{A}_1 = 2 > 0, \det \mathbf{A}_2 = 5 > 0, \det \mathbf{A}_3 = 2 > 0$, 由引理 8 可知, $\det \tilde{\mathbf{A}}_k > 0, k = 1, 2, 3$. 由此可知 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}_0 \mathbf{A}$ 为正定矩阵. 于是, 由定理 2 可知 \mathbf{A} 为可正定化矩阵.

例 2 对于文献[1]例 2 的矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 053 & 328 & -2 \\ & 72 & 615 & 30 \\ & 18 & -1\ 230 & -546 \end{pmatrix}$. 采用定理 2 判别, 比文献[1]的判别法更为简便明了.

取 $\mathbf{S} = \text{diag}(1, 1, -1)$, 则有 $\mathbf{A}_+ = \mathbf{S} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 053 & 328 & -2 \\ & 72 & 615 & 30 \\ & -18 & 1\ 230 & 546 \end{pmatrix}$. 为书写简便, 仍记 $\mathbf{A}_+ = [a_{i,j}]$.

显然, $\mathbf{A}_+ \in \mathbf{S}^+$, 且 \mathbf{A}_+ 中的 $a_{1,j}, a_{j,1} \neq 0, j = 1, 2, 3$. 取 $l = 1, d_1 = 1, d_2 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} = \frac{328}{72} = \frac{41}{9}, d_3 = \frac{a_{1,3}}{a_{3,1}} = \frac{-2}{-18} = \frac{1}{9}$, 则 $\mathbf{D}_0 = \text{diag}(1, \frac{41}{9}, \frac{1}{9})$. 于是, $\tilde{\mathbf{A}}_+ = \mathbf{D}_0 \mathbf{A}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 053 & 328 & -2 \\ & 328 & \tilde{a}_{2,2} & \tilde{a}_{2,3} \\ & -2 & \tilde{a}_{3,2} & \tilde{a}_{3,3} \end{pmatrix}$, 而 $\begin{pmatrix} \tilde{a}_{2,2} & \tilde{a}_{2,3} \\ \tilde{a}_{3,2} & \tilde{a}_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{9} & \\ & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 615 & 30 \\ 1\ 230 & 546 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8\ 405}{3} & \frac{410}{3} \\ \frac{410}{3} & \frac{182}{3} \end{pmatrix}$, 所以 $\tilde{\mathbf{A}}_+ = \mathbf{D}_0 \mathbf{A}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 053 & 328 & -2 \\ & 328 & \frac{8\ 405}{3} & \frac{410}{3} \\ & -2 & \frac{410}{3} & \frac{182}{3} \end{pmatrix}$ 为对称阵.

经计算可知, \mathbf{A}_+ 的顺序主子式 $\det(\mathbf{A}_+)_k > 0, k = 1, 2, 3$. 由引理 8 可知, $\det(\tilde{\mathbf{A}}_+)_k > 0, k = 1, 2, 3$, 故 $\tilde{\mathbf{A}}_+ = \mathbf{D}_0 \mathbf{A}_+$ 为正定矩阵. 于是, 由定理 2 可知 \mathbf{A}_+ 为可正定化矩阵; 由引理 3 可知, \mathbf{A} 为可正定化矩阵.

例 3 对于文献[1]例 1 的矩阵 $\begin{pmatrix} 819 & 0 & 777 & 693 \\ & 0 & -899 & -1\ 073 & -957 \\ & 897 & 713 & 857 & 759 \\ & 1\ 053 & 1\ 674 & 999 & 891 \end{pmatrix}$, 同样可用定理 2 判别, 比文献[1]的更为简便.

取 $\mathbf{S} = \text{diag}(1, -1, 1, 1)$, 则 $\mathbf{A}_+ = \mathbf{S} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 819 & 0 & 777 & 693 \\ & 0 & 899 & 1\ 073 & 957 \\ & 897 & 713 & 857 & 759 \\ & 1\ 053 & 1\ 674 & 999 & 891 \end{pmatrix}$, 仍记 $\mathbf{A}_+ = [a_{i,j}]$. 由此可知,

$\mathbf{A}_+ \in \mathbf{S}^+$, 且 \mathbf{A}_+ 中 $a_{3,j}, a_{j,3} \neq 0, j=1,2,3,4$.

取 $l=3, d_3=1, d_1=a_{3,1}/a_{1,3}=897/777=299/259, d_2=a_{3,2}/a_{2,3}=713/1\ 073, d_4=a_{3,4}/a_{4,3}=759/999=253/333$, 则 $\mathbf{D}_0=\text{diag}(299/259, 713/1\ 073, 1, 253/333)=\text{diag}(1/37 \cdot 299/7, 1/37 \cdot 713/29,$

$1, 1/37 \cdot 253/9)$. 于是有 $\tilde{\mathbf{A}}_+ = \mathbf{D}_0\mathbf{A}_+ = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1,1} & 0 & 897 & \tilde{a}_{1,4} \\ 0 & \tilde{a}_{2,2} & 713 & \tilde{a}_{2,4} \\ 897 & 713 & 857 & 759 \\ \tilde{a}_{4,1} & \tilde{a}_{4,2} & 759 & \tilde{a}_{4,4} \end{bmatrix}$, 而 $\begin{bmatrix} \tilde{a}_{1,1} & 0 & \tilde{a}_{1,4} \\ 0 & \tilde{a}_{2,2} & \tilde{a}_{2,4} \\ \tilde{a}_{4,1} & \tilde{a}_{4,2} & \tilde{a}_{4,4} \end{bmatrix} = \frac{1}{37}$

$\begin{bmatrix} \frac{299}{7} & & & \\ & \frac{713}{29} & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{253}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 819 & 0 & 693 \\ 0 & 899 & 957 \\ 1\ 053 & 1\ 674 & 891 \end{bmatrix} = \frac{1}{37} \begin{bmatrix} 34\ 983 & 0 & 29\ 601 \\ 0 & 22\ 103 & 23\ 529 \\ 29\ 601 & 47\ 058 & 25\ 407 \end{bmatrix}$. 此为非对称阵. 由此可知,

$\tilde{\mathbf{A}}_+ = \mathbf{D}_0\mathbf{A}_+$ 为非对称矩阵, 从而不是正定矩阵. 由定理 2,3 可知, \mathbf{A}_+, \mathbf{A} 不是可正定化矩阵.

例 4 判别矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ 是否为可正定化矩阵.

因为 $\mathbf{A} \in \mathbf{S}^+$, 而且 \mathbf{A} 的三对角阵 \mathbf{A}_{trd} 中两条斜对角线元素皆不为零. 取 $d_1=1, d_2=a_{1,2}/a_{2,1}=2/1=2, d_3=d_2a_{2,3}/a_{3,2}=2 \cdot 4/3=8/3, d_4=d_3a_{3,4}/a_{4,3}=8/3 \cdot 6/4=4, d_5=d_4a_{4,5}/a_{5,4}=4 \cdot 1/8=1/2$, 则有 $\mathbf{D}_* = \text{diag}(1, 2, 8/3, 4, 1/2)$. 对 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}_* \mathbf{A} = [\tilde{a}_{i,j}] = [d_i a_{i,j}]$, 可先考察 $\mathbf{D}_* (\mathbf{A} - \mathbf{A}_{\text{trd}})$ 中非零元的对称性. 因为 $\tilde{a}_{1,4}=d_1a_{1,4}=a_{1,4}=5, \tilde{a}_{4,1}=d_4a_{4,1}=4 \cdot 8=32 \neq \tilde{a}_{1,4}$, 所以可知 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}_* \mathbf{A}$ 为非对称矩阵, 从而不是正定矩阵. 由定理 3 可知, \mathbf{A} 不是可正定化矩阵.

参考文献:

[1] 王伟贤, 王志伟. 关于可正定化矩阵的判定[J]. 数值计算与计算机应用, 1999, 20(3): 215-222.
[2] 胡家赣, 刘兴平. EPE_k 方法和可正定化矩阵[J]. 数值计算与计算机应用, 1997, 18(1): 30-39.
[3] 蒋尔雄, 高坤敏, 吴景琨. 线性代数[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.
[4] 陈恒新. 关于非负矩阵 Perron 特征值的上、下界[J]. 应用数学与计算数学学报, 2007, 21(1): 1-8

Criteria theorem of Positive-Definable Matrix

CHEN Heng-xin

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Theory of the positive-definable matrix be further studied. The necessary and sufficient theorems for the positive-definable matrix are given in the paper. These theorems have better uses than the present critical theorems, that is, the correlated diagonal matrix $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_*$ in our theorems can be structured determinately by the elements of the matrix \mathbf{A} . For this reason, it has good practical value. Four numerical examples are given here, that shows these theorems had better practical uses.

Keywords: positive-definable matrix; critical theorem; necessity and sufficiency; structure

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)