

文章编号: 1000-5013(2011)03-0352-04

无穷直线上的 Hilbert 边值问题解的稳定性

王荟敬, 林峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用共形映射理论, 当无穷直线发生光滑摄动后, 讨论 Hilbert 边值问题的解及其存在性和稳定性问题, 并给出相应的误差估计. 当边值问题的指标 $\kappa \geq 0$ 时, 方程有一般解且是稳定的; 当边值问题的指标 $\kappa < 0$ 时, 引进摄动拟可解的概念, 讨论拟解的稳定性.

关键词: Hilbert 边值问题; 无穷直线; 光滑摄动曲线; 稳定性

中图分类号: O 175.8

文献标志码: A

1 问题的提出

设 E_x 是以 X 轴为对称轴, 且包含 X 轴在内的带宽为 ρ_0 的带形域. 其中: X 为 σ 平面的实轴; ρ_0 是一充分小的正数. 设 R 是一个充分大的正数, $E_1 = \{z | z = x + iy : -R \leq x \leq R, -\rho_0 \leq y \leq \rho_0\}$.

定义 1^[1] 设 f 是定义在带形域 E_x 上的复函数, 若在 E_1 上, $f(x) \in H^\mu$; 在 $E_x \setminus E_1$ 上满足

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq A \left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad z_1, z_2 \in E_x \setminus E_1, \quad (1)$$

则称 $f(z) \in \hat{H}^\mu(E_x)$.

令 $\varphi \in \hat{H}^\mu(E_x)$, 定义 $\hat{A}(\varphi) = \max\{A_1(\mu)A_2(\mu)\}$, 而

$$A_1(\varphi) = A_{E_1}(\varphi) = \sup \left\{ \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu} : z_1, z_2 \in E_1, z_1 \neq z_2 \right\},$$

$$A_2(\varphi) = A_{E_x \setminus E_1}(\varphi) = \sup \left\{ \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|1/z_1 - 1/z_2|^\mu} : z_1, z_2 \in E_x \setminus E_1, z_1 \neq z_2 \right\}.$$

设 $a(\sigma), b(\sigma), c(\sigma) \in \hat{H}^\mu(E_x)$ 是定义在 E_x 上的实函数, 无穷直线上的 Hilbert 边值问题 (I): 要求一个在 Σ^+ 内全纯, 在 $\bar{\Sigma}^+ = \Sigma^+ + X$ 上连续的函数 $\Phi(\sigma)$, 使得

$$\operatorname{Re}\{[a(x) + ib(x)]\Phi^+(x)\} = c(x), \quad x \in X. \quad (2)$$

定义 $C_0^2(x)$ 为 X 轴上的二阶连续可导的函数类, 满足对于 $\omega \in C_0^2(x)$, 有 $\omega, \omega', \omega''$ 连续到 ∞ 处, 在 ∞ 处取值都为 0, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} |x^2 \omega''(x)| = 0$. 在 $C_0^2(x)$ 上定义范数

$$\|\omega\|_2 = \|\omega\|_0 + \|\omega\|_{01} + \|\omega\|_{02} \quad (3)$$

为 Banach 空间. 其中: $\|\omega\|_0 = \max_{x \in X} |\omega(x)|$, $\|\omega\|_{01} = \max\{\max_{|x| \leq 1} |\omega'(x)|, \max_{|x| \geq 1} |x\omega'(x)|\}$, $\|\omega\|_{02} = \max\{\max_{|x| \leq 1} |\omega''(x)|, \max_{|x| \geq 1} |x^2 \omega''(x)|\}$. 由下面引理可知 $\|\omega\|_{01}$ 的合理性.

引理 1 设 $\omega \in C_0^2(X)$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} |x\omega'(x)| = 0$.

证明 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} |x^2 \omega''(x)| = 0$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| \geq X$, 有 $|x^2 \omega''(x)| < \epsilon$. 任取 $x, b \geq X$, 有

$$|\omega'(x) - \omega'(b)| = \left| \int_b^x \omega''(x) dx \right| \leq \left| \int_b^x \frac{\epsilon}{x^2} dx \right| \leq \left| \frac{\epsilon}{x} - \frac{\epsilon}{b} \right|.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} |\omega'(x)| = 0$, 则当 $b \rightarrow \infty$, 有 $|\omega'(x)| \leq \left| \frac{\epsilon}{x} \right|$, 从而有 $\lim_{x \rightarrow \infty} |x\omega'(x)| = 0$.

收稿日期: 2010-05-23

通信作者: 林峰(1962-), 男, 副教授, 主要从事解析函数边值问题的研究. E-mail: lfeng@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2007J0183)

记 $B(\rho_0)=\{\omega|\omega\in C_0^2(X),\|\omega\|_2<\rho_0\}$. X 轴经光滑摄动 $\omega(x)$ 后, 得到曲线 X_ω , 即 $X_\omega=\{\xi|\xi=x+\omega(x), x\in X, \omega(x)\in B(\rho_0)\}\subset E_x$. 由此易知, X_ω 仍为过 ∞ 的光滑曲线.

$\Sigma^+(\Sigma^-)$ 为平面内曲线 X 的上侧(下侧)开区域, $\Sigma_\omega^+(\Sigma_\omega^-)$ 为 σ 平面内 X_ω 的上侧(下侧)开区域, 记 $\Omega^+=\Sigma_\omega^+\cap\Sigma^+, \Omega^-=\Sigma_\omega^-\cap\Sigma^-, \Omega=\Omega^+\cup\Omega^-$. 当 X 轴发生摄动 $\omega(x)$ 后, 得到新的 Hilbert 边值问题(II): 求在 Σ_ω^+ 内的全纯函数 $\Phi_\omega(\sigma)$, 连续到 $\bar{\Sigma}_\omega^+=\Sigma_\omega^++X_\omega$ 上满足

$$\operatorname{Re}\{[a(\xi)+ib(\xi)]\Phi_\omega^+(\xi)\}=c(\xi), \quad \xi\in X_\omega. \tag{4}$$

作变换 $T: z=\frac{\sigma-i}{\sigma+i}$, 把 σ 平面映射到 z 平面. 此时, X 轴映射成 z 平面上的单位圆 $\Gamma: t=\frac{x-i}{x+i}$, 则 Hilbert 边值问题(I)转化为 Hilbert 边值问题(III): 求在 D^+ (Γ 所围的内部区域)内的全纯函数 $\Phi^*(z)$, 连续到 $\bar{D}^+=D^++\Gamma$ 上, 满足边值条件

$$\operatorname{Re}\{[a^*(t)+ib^*(t)]\Phi^{*,+}(t)\}=c^*(t), \quad t\in\Gamma. \tag{5}$$

X_ω 映射成 z 平面上的近似于单位圆的闭曲线 $\Gamma: \zeta=\frac{\xi-i}{\xi+i}$, 则 Hilbert 边值问题(II)转化为 Hilbert 边值问题(IV): 求在 D_ω^+ (Γ_ω 所围的内部区域)内的全纯函数, $\Phi_\omega^+(z)$ 连续到 $\bar{D}_\omega^+=D_\omega^++\Gamma_\omega$ 上, 满足边值条件

$$\operatorname{Re}\{[a^*(\zeta)+ib^*(\zeta)]\Phi_\omega^{*,+}(\zeta)\}=c^*(\zeta), \quad \zeta\in\Gamma_\omega. \tag{6}$$

记 $f(\sigma)=f^*(z)=f(T^{-1}(z))^{[2]}$. 在下面的证明中依然使用此记法.

2 Hilbert 边值问题(II)的解

引理 2^[3] Hilbert 边值问题(I), (II), (III), (IV) 的指标 $\kappa, \kappa^*, \kappa_\omega, \kappa_\omega^*$ 均相等.

引理 3 在 Hilbert 边值问题(III)和 Hilbert 边值问题(IV)中, 记 $\zeta=t+\rho(t)$, 则有 $\|\rho\|_2\leq C\rho_0$. 其中: $\|\rho\|_2$ 如式(1)定义; $\|\omega\|_2$ 如式(3)定义.

证明 由文献[3]可知, $\rho(t)=\frac{(1-t)^2\omega(\frac{1-t}{1+t}i)}{2i+(1-t)\omega(\frac{1-t}{1+t}i)}$, 再由文献[3]定理 1 中证明步骤, 可得

$$|\rho(t)|\leq C(\rho_0)\|\omega\|_2\leq C_1\rho_0, \quad |\rho'(t)|\leq C(\rho_0)\|\omega\|_2\leq C_1\rho_0.$$

又因为

$$\rho'(t)=-\frac{(1-t)^2\omega^2(\frac{1+t}{1-t}i)+4i(1-t)\omega(\frac{1+t}{1-t}i)+4\omega'(\frac{1+t}{1-t}i)}{(1-t)^2\omega^2(\frac{1+t}{1-t}i)+4i(1-t)\omega(\frac{1+t}{1-t}i)-4},$$

所以有

$$\begin{aligned} |\rho''(t)| &= \left| \left[1 + \frac{4+4\omega'(\frac{1+t}{1-t}i)}{(1-t)^2\omega^2(\frac{1+t}{1-t}i)+4i(1-t)\omega(\frac{1+t}{1-t}i)-4} \right]' \right| = \\ &8 \left| \frac{i\omega''\omega^2+(1-t)\omega^2+2i\omega+(1-t)\omega^2\omega'-2i\omega\omega'^2+\frac{4\omega'^2}{1-t}-\frac{4\omega''\omega}{1+t}}{[2i+(1-t)\omega]^4} + \frac{\frac{4\omega'}{1-t}-\frac{4\omega''}{(1-t)^2}}{[2i+(1-t)\omega]^4} \right| \leq \\ &8 \left| \frac{i\omega''\omega^2+\frac{2i}{x+i}\omega^2+2i\omega+\frac{2i}{x+i}\omega^2\omega'-2i\omega\omega'^2-2i(x+i)\omega'^2+2i(x+i)\omega''\omega}{[2i+(1-t)\omega]^4} \right| + \\ &8 \left| \frac{2i(x+i)\omega'}{[2i+(1-t)\omega]^4} \right| + 8 \left| \frac{(x+i)^2\omega''}{[2i+(1-t)\omega]^4} \right|. \end{aligned}$$

由 $\|\omega\|_2=\|\omega\|_0+\|\omega\|_{01}+\|\omega\|_{02}<\rho_0$, 可得 $|\rho''(t)|\leq C_1\rho_0$. 综上, 有 $\|\rho\|_2\leq C\rho_0$.

由引理 3 可知, Γ_ω 满足文献[2]引理 1 的条件. 记 $f^*(\Psi(\cdot, \Gamma))=f_\Psi^*(\cdot)$ 是以下讨论中形式为 f_Ψ^* 的函数, 则由文献[2]可知, $f_\Psi^*\in H^{\mu(1-\varepsilon)}(\Gamma)$; $f(\Psi(\cdot, X))=f_\Psi(\cdot)$. 由文献[4]中的引理 1.5.1 可得,

$f_\Psi \in H^{\mu(1-\varepsilon)}(X)$. 另外, 记 $F(\cdot, \Gamma_\omega) = F_T(\cdot, X_\omega)$, 则下面定理成立.

定理 1 (1) 当 $\kappa \geq 0$ 时, Hilbert 边值问题(II)有一般解. 即

$$\Phi_\omega(\sigma) = \Phi_{0,\omega}(\sigma) + X_\omega(\sigma)P_\kappa(\sigma). \quad (7)$$

$$X_\omega(\sigma) = \begin{cases} ce^{\Gamma_\omega(\sigma)}, & \sigma \in \Sigma_\omega^+, \\ cF_{\bar{F}^\kappa}(\sigma, X_\omega)e^{\Gamma_\omega(\sigma)}, & \sigma \in \Sigma_\omega^-, \end{cases}$$

$$\Gamma_\omega(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_X \frac{\log[(\frac{x-i}{x+i})^{-\kappa} G_\Psi(x)]}{[\frac{x-i}{x+i} - F_T(\sigma, X_\omega)]} \frac{2i}{(x+i)^2} dx,$$

$$G_\Psi(\sigma) = \frac{a_\Psi(\sigma) - ib_\Psi(\sigma)}{a_\Psi(\sigma) + ib_\Psi(\sigma)},$$

$$\Phi_{0,\omega}(\sigma) = \frac{X_\omega(\sigma)}{2\pi i} \left\{ \int_X \frac{B_\Psi(x)}{X_\Psi^+(x)(\frac{x-i}{x+i} - F_T(\sigma, X_\omega))} \frac{2i}{(x+i)^2} dx + \right.$$

$$F_T^\kappa(\sigma, X_\omega) \int_X \frac{B_\Psi(x)(\frac{x-i}{x+i})^{-\kappa}}{X_\Psi^+(x)(\frac{x-i}{x+i} - F_T(\sigma, X_\omega))} \frac{2i}{(x+i)^2} dx \left. \right\}$$

$$\frac{F_T^\kappa(\sigma, X_\omega)X_\omega(\sigma)}{2\pi i} \int_X \frac{B_\Psi(x)(\frac{x-i}{x+i})^{-\kappa-1}}{X_\Psi^+(x)} \frac{2i}{(x+i)^2} dx.$$

其中: $B_\Psi(x) = \frac{c_\Psi(x)}{a_\Psi(x) + ib_\Psi(x)}$; $P_\kappa(\sigma)$ 为关于 σ 的不超过 κ 次任意多项式.

(2) 当 $\kappa \leq -2$ 时, 当且仅当

$$\int_X \frac{B_\Psi(x)(\frac{x-i}{x+i})^k}{X_\Psi^+(x)} \frac{2i}{(x+i)^2} dx = 0, \quad k = 1, \dots, -\frac{\kappa}{2} - 1$$

成立时, 有唯一解. 即

$$\Phi_\omega(\sigma) = \frac{X_\omega(\sigma)}{\pi i} \int_X \frac{B_\Psi(x)}{X_\Psi^+(x)(\frac{x-i}{x+i} - F_T(\sigma, X_\omega))} \frac{2i}{(x+i)^2} dx. \quad (8)$$

3 Hilbert 边值问题(II)的稳定性

定义 2 假设 $\Phi(\sigma), \Phi_\omega(\sigma)$ 分别是 Hilbert 边值问题(I), (II)的解. 当摄动项 $\|\omega\|_2 \rightarrow 0$ 时, 若有 $\|\Phi_\omega - \Phi\|_{\Omega^+} \rightarrow 0$ 成立, 则称 Hilbert 边值问题(II)的解 $\Phi_\omega(\sigma)$ 在集 E_x 上是稳定的.

(1) $\kappa \geq 0$ 时解的稳定性证明.

定理 2 设 $\|\omega\|_2 < \rho_0$, $a(\sigma), b(\sigma), c(\sigma) \in \hat{H}^\mu(E)$, $v \in (0, 1)$, 则当 $\kappa \geq 0$ 且 $\sigma \in \Omega^+ = \Sigma_\omega^+ \cap \Sigma^+$ 时, 有

$$\|\Phi_\omega - \Phi\|_{\Omega^+} \leq C(\rho_0, \varepsilon)(\hat{A}(B) + \hat{A}(G) + \|G\|_X + \|P\|_X) \|\omega\|_2^{\mu(1-\varepsilon)v}.$$

其中: $\|\cdot\|_{\Omega^+} = \max_{\Omega^+} |\cdot|$.

证明 由引理 3 和文献[3]定理 1 的证明, 可得

$$\|\Phi_\omega - \Phi\|_{\Omega^+} = \|\Phi_\omega^* - \Phi^*\|_{\Omega^{*+}} \leq C(\rho_0, \varepsilon)(A(B^*) + A(G^*) + \|G^*\|_r + \|P^*\|_r) \|\omega\|_2^{\mu(1-\varepsilon)v}.$$

因为 $G^*(z) = G(\sigma)$, 所以 $\|G^*\|_r = \|G\|_X$. 另一方面, 由文献[2]中的定义可知

$$A(G^*) = \sup_{t_1, t_2 \in r} \frac{|G^*(t_1) - G^*(t_2)|}{|t_1 - t_2|} =$$

$$\max \left\{ \sup_{x_1, x_2 \in I} \frac{|G(x_1) - G(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} \frac{|x_1 - x_2|^\mu}{|t_1 - t_2|^\mu}, \sup_{x_1, x_2 \in X \setminus I} \frac{|G(x_1) - G(x_2)|}{|1/x_1 - 1/x_2|^\mu} \frac{|1/x_1 - 1/x_2|^\mu}{|t_1 - t|^\mu} \right\} \leq$$

$$\max \left\{ C_1 \sup_{x_1, x_2 \in I} \frac{|G(x_1) - G(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu}, C_2 \sup_{x_1, x_2 \in X \setminus I} \frac{|G(x_1) - G(x_2)|}{|1/x_1 - 1/x_2|^\mu} \right\} \leq C\hat{A}(G).$$

当 $x_1, x_2 \in I$ 时^[5], $\frac{|x_1-x_2|^\mu}{|t_1-t_2|^\mu} = 2^{-\mu} |(i+x_1)(i+x_2)|^{-\mu} \leq C_1$; 当 $x_1, x_2 \in X \setminus I$ 时, $\frac{|1/x_1-1/x_2|^\mu}{|t_1-t_2|^\mu} \times 2^{-\mu} |(1+\frac{i}{x_1})(1+\frac{i}{x_2})| \leq C_2$; C_1, C_2 为非 0 实常数.

同理, 可证明 $A(B^*) \leq C\hat{A}(B)$, $\|P^*\|_r = \|P\|_x$. 所以有

$$\|\Phi_\omega - \Phi\|_{\Omega^+} \leq C(\rho_0, \varepsilon)(\hat{A}(B) + \hat{A}(G) + \|G\|_x + \|P\|_x) \|\omega\|_2^{\mu(1-\varepsilon)v}. \tag{9}$$

推论 1 任给 $\omega \in B(\rho_0), a(\sigma), b(\sigma), c(\sigma) \in \dot{H}^\nu(E)$, 当 $\kappa \geq 0$ 且 $\sigma \in \Omega^+ = \Sigma_\omega^+ \cap \Sigma^+$ 时, Hilbert 边值问题 (I) 的解 $\Phi(\sigma)$ 与 Hilbert 边值问题 (II) 的解 $\Phi_\omega(\sigma)$ 满足

$$\lim_{\|\omega\|_2 \rightarrow 0} \|\Phi_\omega - \Phi\|_{\Omega^+} \rightarrow 0.$$

(2) $\kappa \leq -2$ 时解的稳定性证明.

定义 3 对于 Hilbert 边值问题 (II), 当 $\kappa \leq -2$ 时, 若

$$\int_x \frac{B_\Psi(x)(\frac{x-i}{x+i})^k}{X_\Psi^*(x)} \frac{2i}{(x+i)^2} dx \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, -\frac{\kappa}{2} - 1 \tag{10}$$

成立时, 摄动拟可解. 此时, 称式 (8) 为它的拟解. 类似于文献 [2] 的定理 2 和推论 2, 有以下结论.

定理 3 任给 $\omega \in B(\rho_0), a(\sigma), b(\sigma), c(\sigma) \in \dot{H}^\nu(E_x), v \in (0, 1)$, 当 $\kappa \leq -2$ 时, Hilbert 边值问题 (II) 当且仅当式 (8) 成立时, 摄动拟可解, 拟解为式 (8). 此时, $P_\kappa(\sigma) = 0$, 且此拟解与 Hilbert 边值问题 (I) 的解满足

$$\|\Phi_\omega - \Phi\|_{\Omega^+} \leq C(\rho_0, \varepsilon)(\hat{A}(B) + \hat{A}(G) + \|G\|_x + \|P\|_x) \|\omega\|_2^{\mu(1-\varepsilon)v}.$$

推论 2 任给 $\omega \in B(\rho_0), a(\sigma), b(\sigma), c(\sigma) \in \dot{H}^\nu(E_x)$, 当 $\kappa \leq -2$ 且 $\sigma \in \Omega^+ = \Sigma_\omega^+ \cap \Sigma^+$ 时, Hilbert 边值问题 (I) 的解 $\Phi(\sigma)$ 与 Hilbert 边值问题 (II) 的拟解 $\Phi_\omega(\sigma)$ 满足

$$\lim_{\|\omega\|_2 \rightarrow 0} \|\Phi_\omega - \Phi\|_{\Omega^+} \rightarrow 0.$$

参考文献:

[1] 章红梅, 王传荣. Riemann 边值问题的解关于边界曲线的稳定性[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2001, 29(1): 1-4.
[2] ZHANG Hong-mei, WANG Chuan-rong, ZHU Yuan-can. Stability of solutions to hilbert boundary value problem under perturbation of the boundary curve[J]. J Math Anal Appl, 2003, 284(2): 601-617.
[3] 章红梅. 无穷直线上的 Riemann 边值问题解的稳定性[J]. 数学研究, 2005, 38(4): 394-397.
[4] 路见可. 解析函数边值问题[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987: 56-58.
[5] 林珍连. 某些调和单叶函数的稳定性及系数估计[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2009, 30(6): 718-719.

Stability of the Solution of Hilbert Boundary Value Problem on Infinite Line

WANG Hui-jing, LIN Feng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Applying the knowledge of quasiconformal mapping theorem, we discuss the stability and existence of the solution of Hilbert boundary value problem on the infinitely line when the smooth perturbation of the infinite line occurs, and give the corresponding error estimates. If the index of this problem is non-negative, the probcems have general stable solutions. For negative index we give a conception of quasi-solution and discuss its stability correspondingly.

Keywords: Hilbert boundary value problem; infinite line; smooth perturbation curve; stability