

文章编号: 1000-5013(2011)03-0348-04

# 计算非负不可约矩阵谱半径的新算法

宋海洲, 徐强, 田朝薇

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 设  $A=(a_{i,j})_{n \times n}$  为非负不可约矩阵, 设计一种计算非负不可约矩阵谱半径  $\rho(A)$  的通用迭代算法, 并证明算法的收敛性. 数值实验表明, 该算法比幂法迭代算法具有较快的收敛速度.

**关键词:** 正矩阵; 谱半径; 迭代方法; 收敛性

**中图分类号:** O 241.6

**文献标志码:** A

非负矩阵在数值分析、图论、计算机科学、控制论、管理科学等领域上有着极其重要的作用<sup>[1-4]</sup>, 而非负矩阵谱半径的计算又是其核心问题之一. 计算非负矩阵的谱半径, 通常采用幂法、正交三角矩阵(QR)算法, 但这些算法迭代速度不快. 本文设计一种计算非负不可约矩阵谱半径的通用迭代方法.

## 1 算法的设计

设  $A=(a_{i,j})_{n \times n}$  为非负不可约矩阵, 则迭代计算谱半径  $\rho(A)$  的算法有如下 4 个步骤.

(1) 输入矩阵  $A$ , 令  $B=(A+I)^{n-1}$ ,  $k=0$ ; 又令  $C=I$ ,  $D=A$ , 记  $C=(c_{i,j})_{n \times n}$ ,  $D=(d_{i,j})_{n \times n}$ ,  $\epsilon > 0$ .

(2) 计算  $r_i(C)$ . 其中:  $r_i(C) = \sum_{j=1}^n c_{i,j}$  为矩阵  $C$  的第  $i$  行行和 ( $i=1, 2, \dots, n$ ). 令  $R = \max_i r_i(C)$ .

(3)  $k=k+1$ , 更新  $D=DB/R$ ,  $C=CB/R$ , 记  $C=(c_{i,j})_{n \times n}$ ,  $D=(d_{i,j})_{n \times n}$ , 分别计算  $r_i(C)$ ,  $r_i(D)$ . 其

中:  $r_i(C) = \sum_{j=1}^n c_{i,j}$ ,  $r_i(D) = \sum_{j=1}^n d_{i,j}$  分别为更新后的矩阵  $C, D$  的第  $i$  行行和 ( $i=1, 2, \dots, n$ ). 令  $W_{1,k} = \min_i \frac{r_i(D)}{r_i(C)}$ ,  $W_{2,k} = \max_i \frac{r_i(D)}{r_i(C)}$ ;

(4) 若  $W_{2,k} - W_{1,k} > \epsilon$ , 更新  $R = \max_i r_i(C)$ , 转步骤(3); 否则, 令  $(W_{1,k} + W_{2,k})/2$  为矩阵  $A$  的近似谱半径.

## 2 算法的收敛性

**引理 1**<sup>[5]</sup> 设  $B$  为正矩阵,  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  为  $B$  对应  $\rho(B)$  的正特征向量,  $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  为  $B^T$  对应  $\rho(B)$  的正特征向量. 令  $c=(Y^T X)^{-1}$ , 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{B}{\rho(B)} \right)^k = (Y^T X)^{-1} X Y^T = c X Y^T = c \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix}.$$

**定理 1** 设  $B$  为  $n$  阶正矩阵,  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  为  $B$  对应  $\rho(B)$  的正特征向量, 记  $r_i^k$  为  $B^k$  的第  $i$  行行和 ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 记  $u_1 = (\min_i x_i) / (\sum_{i=1}^n x_i)$ ,  $u_2 = (\max_i x_i) / (\sum_{i=1}^n x_i)$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_i^k}{r_j^k} = \frac{x_i}{x_j}$ ,  $i, j=1, 2, \dots, n$ .

收稿日期: 2009-07-11

通信作者: 宋海洲(1971-), 男, 副教授, 主要从事数学模型的研究. E-mail: hzsong@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511028)

$\cdots, n$ , 并且有

$$0 < u_1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_i^k}{\sum_{j=1}^n r_j^k} \leq u_2, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \quad (1)$$

证明 设  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$  为  $\mathbf{B}^T$  对应  $\rho(\mathbf{B}^T)$  的正特征向量, 记  $c = (\mathbf{Y}^T \mathbf{X})^{-1}$ . 由引理 1, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_i^k}{\rho^k(\mathbf{B})} = c(x_i \sum_{j=1}^n y_j), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_j^k}{\rho^k(\mathbf{B})} = c(x_j \sum_{i=1}^n y_i).$$

经整理有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_i^k}{r_j^k} = \frac{x_i}{x_j}$ , 故式(1)可证. 证毕.

**定理 2** 设  $n$  维向量  $(p_1, p_2, \cdots, p_n) \geq 0$ ,  $(q_1, q_2, \cdots, q_n) > 0$ . 记  $t_i = \frac{p_i}{q_i}$ ,  $i = 1, 2, \cdots, n$ ;  $T = \max_i t_i$ ;

$t = \min_i t_i$ ,  $\bar{t} = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}$ ;  $s_i = q_i / \sum_{i=1}^n q_i$ ,  $i = 1, 2, \cdots, n$ ;  $s = \min_i s_i$ , 则有

$$t + ns(\bar{t} - t) \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n q_i} \leq T - ns(T - \bar{t}). \quad (2)$$

证明 由于  $s_i = q_i / \sum_{i=1}^n q_i$ ,  $i = 1, 2, \cdots, n$ , 故  $\sum_{i=1}^n s_i = 1$ , 则有

$$\begin{aligned} T - \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n q_i} &= \left( \sum_{i=1}^n s_i \right) T - \frac{\sum_{i=1}^n t_i q_i}{\sum_{i=1}^n q_i} = \sum_{i=1}^n (T - t_i) s_i \geq s \sum_{i=1}^n (T - t_i) = ns(T - \bar{t}), \\ \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n q_i} - t &= \sum_{i=1}^n s_i t_i - \left( \sum_{i=1}^n s_i \right) t = \sum_{i=1}^n s_i (t_i - t) \geq ns(\bar{t} - t), \end{aligned}$$

由此可证式(2)成立. 证毕.

**引理 2**<sup>[5]</sup> 设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶非负不可约矩阵,  $\mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{n-1}$ , 则  $\mathbf{B}$  为  $n$  阶正矩阵.

**引理 3**<sup>[2]</sup> 设  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶非负不可约矩阵,  $\mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{n-1}$ , 记  $r_i(\mathbf{AB}^{k+1})$ ,  $r_i(\mathbf{AB}^k)$ ,  $r_i(\mathbf{B}^{k+1})$ ,  $r_i(\mathbf{B}^k)$

分别表示  $\mathbf{AB}^{k+1}$ ,  $\mathbf{AB}^k$ ,  $\mathbf{B}^{k+1}$ ,  $\mathbf{B}^k$  的第  $i$  行行和 ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ;  $k = 0, 1, \cdots$ ). 令  $T^k = \max_i \frac{r_i(\mathbf{AB}^k)}{r_i(\mathbf{B})^k}$ ,  $t^k =$

$\min_i \frac{r_i(\mathbf{AB}^k)}{r_i(\mathbf{B})^k}$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k$  及  $\lim_{k \rightarrow \infty} t^k$  均存在, 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} t^k \leq \rho(\mathbf{A}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} T^k$ . 由此易证得以下引理 4 成立.

**引理 4** 设  $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ ,  $\mathbf{B} = (b_{i,j})$  均是  $n$  阶方阵, 且  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ . 如果记  $r_i(\mathbf{AB}^{k+1})$ ,  $r_i(\mathbf{AB}^k)$ ,  $r_i(\mathbf{B}^{k+1})$  和  $r_i(\mathbf{B}^k)$  分别表示  $\mathbf{AB}^{k+1}$ ,  $\mathbf{AB}^k$ ,  $\mathbf{B}^{k+1}$ ,  $\mathbf{B}^k$  的第  $i$  行行和 ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ;  $k = 0, 1, \cdots$ ), 则有  $r_i(\mathbf{AB}^{k+1}) =$

$$\sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(\mathbf{AB}^k), \quad r_i(\mathbf{B}^{k+1}) = \sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(\mathbf{B}^k) \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

**定理 3** 设  $\mathbf{B} = (b_{i,j})$  是  $n$  阶正矩阵, 记  $r_i(\mathbf{B}^k)$  表示  $\mathbf{B}^k$  的第  $i$  行行和 ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ,  $k = 0, 1, \cdots$ ),

$$q_m^{(k,i)} = b_{i,m} r_m(\mathbf{B}^k) \quad (i, m = 1, 2, \cdots, n; k = 0, 1, \cdots), \quad s_m^{(k,i)} = \frac{q_m^{(k,i)}}{\sum_{m=1}^n q_m^{(k,i)}} \quad (i, m = 1, 2, \cdots, n; k = 0, 1, \cdots), \quad \text{记 } s =$$

$\inf\{s_m^{(k,i)} \mid i, m = 1, \cdots, n; k = 0, 1, \cdots\}$ , 则  $s > 0$ .

证明 假设  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$  为  $\mathbf{B}$  对应  $\rho(\mathbf{B})$  的正特征向量, 则由定理 1 可得, 对于任意  $i, m = 1, 2, \cdots, n$ , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_m^{(k,i)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_m^{(k,i)}}{\sum_{m=1}^n q_m^{(k,i)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{i,m} r_m(\mathbf{B}^k)}{\sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(\mathbf{B}^k)} = \frac{b_{i,m} x_m}{\sum_{m=1}^n b_{i,m} x_m} > 0$$

又因为对于任意  $i, m=1, 2, \cdots, n$ , 任意  $k=0, 1, 2, \cdots$ , 有  $s_m^{(k,i)} > 0$ , 故  $s = \inf \{s_m^{(k,i)} \mid k=0, 1, \cdots, i; m=1, 2, \cdots, n\} > 0$ .

**定理 4** 设  $A$  是  $n$  阶非负不可约矩阵,  $B=(A+I)^{n+1}$ . 记  $r_i(AB^{k+1}), r_i(AB^k), r_i(B^{k+1})$  和  $r_i(B^k)$  分别表示  $AB^{k+1}, AB^k, B^{k+1}, B^k$  的第  $i$  行行和( $i=1, 2, \cdots, n; k=0, 1, \cdots$ ). 令  $T^k = \max_i \frac{r_i(AB^k)}{r_i(B^k)}, t^k = \min_i \frac{r_i(AB^k)}{r_i(B^k)}$ , 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = \lim_{k \rightarrow \infty} t^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{T^k + t^k}{2}\right) = \rho(A). \tag{3}$$

**证明** 易知  $AB=BA$ , 故由  $T^k$  及  $t^k$  的定义及引理 4 可得

$$\begin{aligned} T^{k+1} - t^{k+1} &= \max_i \frac{r_i(AB^{k+1})}{r_i(B^{k+1})} - \min_i \frac{r_i(AB^{k+1})}{r_i(B^{k+1})} = \\ &= \max_i \frac{\sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(AB^k)}{\sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(B^k)} - \min_i \frac{\sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(AB^k)}{\sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(B^k)}. \end{aligned} \tag{4}$$

记  $b_{i,m} r_m(AB^k)$  为  $p_m^{k,i} (i, m=1, 2, \cdots, n; k=0, 1, \cdots)$ ,  $b_{i,m} r_m(B^k)$  为  $q_m^{k,i} (i, m=1, 2, \cdots, n; k=0, 1, \cdots)$ ,  $t_m^{k,i} = \frac{p_m^{k,i}}{q_m^{k,i}}$ , 则  $t_m^{k,i} = \frac{r_m(AB^k)}{r_m(B^k)}$  与  $i$  无关. 故可记  $t_m^{k,i}$  为  $t_m^k$ , 且有  $T^k = \max_m t_m^k, t^k = \min_m t_m^k$ . 记  $\bar{u}^k = \frac{t_1^k + \cdots + t_n^k}{n}, s_m^{(k,i)} = \frac{q_m^{(k,i)}}{\sum_{m=1}^n q_m^{(k,i)}}, s^{(k,i)} = \min_m s_m^{(k,i)}, s = \inf \{s^{(k,i)} \mid k=0, 1, \cdots; i=1, 2, \cdots, n\}$ .

利用定理 2, 可得

$$t^k + ns^{(k,i)}(\bar{u}^k - t^k) \leq \frac{\sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(AB^k)}{\sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(B^k)} \leq T^k - ns^{(k,i)}(T^k - \bar{u}^k),$$

再利用定理 3, 可得

$$t^k + ns(\bar{u}^k - t^k) \leq \frac{\sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(AB^k)}{\sum_{m=1}^n b_{i,m} r_m(B^k)} \leq T^k - ns(T^k - \bar{u}^k),$$

利用上式及式(4), 可得

$$\begin{aligned} T^{k+1} - t^{k+1} &\leq T^k - ns(T^k - \bar{u}^k) - (t^k + ns(\bar{u}^k - t^k)) = \\ &= T^k - t^k - ns(T^k - t^k) = (1 - ns)(T^k - t^k). \end{aligned}$$

由定理 3 可知,  $1 - ns < 1$ , 而  $1 - ns \geq 0$  是显然的, 故  $|1 - ns| < 1$ . 利用上式递推, 可得

$$T^k - t^k \leq (1 - ns)(T^{k-1} - t^{k-1}) \leq (1 - ns)^2(T^{k-2} - t^{k-2}) \leq \cdots \leq (1 - ns)^k(T^0 - t^0),$$

故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (T^k - t^k) = 0.$$

又利用引理 3, 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} t^k \leq \rho(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} T^k$ . 因此式(3)可证. 证毕.

3 数值试验

例 1  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 谱半径理论值  $\rho(A) = \sqrt{2}$ .

由非负不可约矩阵的算法求得的结果,如表 1 所示.

表 1 例 1 中矩阵  $\mathbf{A}$  的谱半径表  
Tab. 1 Table of matrix  $\mathbf{A}$ 's spectral radius in example 1

精度控制	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$
迭代次数	1	2	3	4
特征值	1.414 213 564 213 56	1.414 213 562 373 10	1.414 213 562 370 95	1.414 213 562 373 10
特征值误差	$<10^{-3}$	$<10^{-7}$	$<10^{-11}$	$<10^{-15}$

对于例 1 中的矩阵  $\mathbf{A}$ ,采用幂法是求不出  $\rho(\mathbf{A})$  的.

例 2  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

采用幂法及非负不可约矩阵的算法,求  $\mathbf{A}$  的谱半径在精度要求下所需的迭代次数,如表 2 所示.

表 2 例 2 矩阵  $\mathbf{A}$  的谱半径的收敛速度比较表

Tab. 2 Table for the convergence rate comparison of matrix  $\mathbf{A}$ 's spectral radius in example 2

精度控制	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$
幂法迭代次数	7	11	15	19
非负不可约矩阵的算法迭代次数	1	2	3	4

从表 2 可以看出,所设计求非负不可约矩阵的算法比幂法收敛速度要快.

参考文献:

[1] 卢琳璋,马飞. 非负矩阵 perron 根的上下界[J]. 计算数学, 2003,25(2):58-64.  
[2] 殷剑宏. 非负矩阵最大特征值的新界值[J]. 数值计算与计算机应用,2002,23(4):292-295.  
[3] 段复建,张可村. Z-矩阵最小特征值及特征向量的数值算法[J]. 2007,24(3):563-566.  
[4] 张凤祥. 非负矩阵最大特征值的平滑算法[J]. 高等学校计算数学学报,2001,23(1):45-55.  
[5] 蒋正新,施国梁. 矩阵理论及其应用[M]. 北京:北京航空学院出版社,1998.

A New Algorithm for the Spectral Radius of  
Non-Negative Irreducible Matrix

SONG Hai-zhou, XU Qiang, TIAN Zhao-wei

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** Let  $\mathbf{A}=(a_{i,j})_{n\times n}$  is a non-negative irreducible matrix, then a new algorithm for the spectral radius  $\rho(\mathbf{A})$  of the matrix  $\mathbf{A}$  is designed in this paper. The convergence of the algorithm is also proved. It is shown that the algorithm has a rapid convergence rate by numerical experiment.

**Keywords:** non-negative; irreducible; iterative method; convergence

(责任编辑: 陈志贤      英文审校: 张金顺, 黄心中)