文章编号： 1000-5013(2011)03-0343-05

一类 Nehari 函数族的拟共形延拓与系数偏差

谢志春，黄心中

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究一类 Nehari 函数族的拟共形延拓，给出拟共形延拓的复伸张估计．对该类函数在单位圆内级数展开的系数给出一些精确估计，改进并推广了杨宗信等人的相应结果.

关键词： Nehari 函数族；Schwarz 导数；拟共形延拓；系数估计

中图分类号： O 174.55 **文献标志码：** A

1 预备知识

设 $D=\{z||z|<1$，f 为 D 上的局部单叶的解析函数，其 Schwarz 导数定义为 $S_f(z)=(f''/f')^1-\frac{1}{2}(f''/f')^2$. 由单叶函数论可知，$f$ 单叶的必要条件是 $|S_f(z)|\leqslant 6/(1-|z|^2)^2$.

1949 年，Nehari[1] 证明了，若 f 在 D 内解析，满足 $|S_f(z)|\leqslant 2/(1-|z|^2)^2$，则 f 在 D 内单叶. Ahlfors 等[2] 证明了，若 f 为 D 内局部单叶的亚纯函数，满足

$$|S_f(z)|\leqslant\frac{2k}{(1-|z|^2)^2},\qquad 0\leqslant k<1,\tag{1}$$

则 f 在 D 内单叶且可以拟共形延拓到整个复平面上．其延拓后的复特征为

$$\mu(1/\bar{z})=-\frac{1}{2}(z/\bar{z})^2(1-|z|^2)^2 s_f(z),\qquad z\in D.$$

1979 年，Nehari[3] 证明了，若 f 在 D 内解析，满足

$$|S_f(z)|\leqslant\frac{2\alpha(1+(1-\alpha)|z|^2}{(1-|z|^2)^2},\qquad 1\leqslant\alpha\leqslant 2.\tag{2}$$

则 f 在单位圆盘上单叶，等号可以由极值函数 $F(z)=\int_0^z \mathrm{d}\zeta/(1-\zeta^2)^\alpha$ 达到. 用 N 表示单位圆盘上满足式(2)的解析函数的全体，N^k 表示单位圆盘上满足

$$|S_f(z)|\leqslant\frac{2\alpha(1+(1-\alpha)|z|^2}{(1-|z|^2)^2},\qquad 0\leqslant k<1,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant 2\tag{3}$$

的解析函数的全体.

文献[4-9]对函数类进行深入的研究，称满足式(2)的函数族为 Nehari 族. Nehari 函数类与区域常数、区域的几何特征有密切的联系[10]. 可见，对该问题的研究是一个重要的课题.

基于 Ahlfors 等[2] 的研究，文献[11-12]对 $f\in N^k$ 的拟共形延拓作了进一步研究，文献[11]得到

定理 A 设 f 是定义在单位圆盘 D 上的亚纯函数，满足式(3)，当 $0\leqslant k\leqslant 2\alpha-1-\sqrt{(2\alpha-1)^2}$，$M=\frac{1+k+\sqrt{(1+k)^2-4\alpha k}}{2}$ 时，$E_f(z)$ 是 f 到整个复平面上的 $\frac{1+k}{1-k}$-拟共形延拓，有

$$E_f(z)=\begin{cases}f(z), & |z|\leqslant 1,\\ h_M(z), & |z|>1,\end{cases}$$

收稿日期： 2009-09-19

通信作者： 黄心中(1957-)，男，教授，主要从事函数论的研究. E-mail：huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目： 福建省自然科学基金项目(2008J0195)

$$h_M(z)=f(\frac{1}{\bar z})+\frac{f'(\frac{1}{\bar z})}{\frac{M\bar z}{|z|^2-1}-\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}(\frac{1}{\bar z})}.$$

其中:$M=M(\alpha,k)$是常数.

2 主要结果及其证明

设 $f(z)$为单位圆上局部单叶的解析函数满足式(3),根据文献[5]的方法,令

$$E_f(z)=\begin{cases}f(z), & |z|\leqslant 1,\\ h_\alpha(z), & |z|>1.\end{cases}$$

$$h_\alpha(z)=f(\frac{1}{\bar z})+\frac{f'(\frac{1}{\bar z})}{\frac{M\bar z}{|z|^2-1}-\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}(\frac{1}{\bar z})},$$

则在$|z|>1$上 $h_\alpha(z)$的伸缩商为

$$|\mu_{h_\alpha}(z)|\leqslant(\alpha-1)(1-k)\frac{1}{|z|^2}+k<(\alpha-1)(1-k)+k\leqslant 1.$$

由文献[10]可知,$h_\alpha(z)$为 f 到整个复平面上的拟共形延拓,且当 $\alpha=1$ 时有 $\|\mu_h(z)\|_\infty=k$ 取得最小的伸张. 即 $h(z)$为 f 到整个复平面上的$\frac{1+k}{1-k}$-拟共形延拓. 这是文献[2]的结论. 但是,当 $1<\alpha\leqslant 2$ 时,利用上述构造却得不到$\frac{1+k}{1-k}$-拟共形延拓.

为此,如定理 A 所述,希望找出适当的 $M(\alpha,k)$,使得上述的延拓是整个复平面上的拟共形映照,且使得 $\|\mu_{h_M}\|_\infty$为最小. 对于$|z|>1$,经计算可得

$$h_{\bar z}=-\bar z^{-2}f'(\frac{1}{\bar z})+\Big\{-\bar z^{-2}f''(\frac{1}{\bar z})\Big[\frac{M\bar z}{|z|^2-1}-\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}(\frac{1}{\bar z})\Big]-$$
$$f'(\frac{1}{\bar z})\Big[\frac{-M}{(|z|^2-1)^2}+\frac{1}{2}(\frac{f''}{f'})'\bar z^{-2}\Big]\Big\}\Big/\Big[\frac{M\bar z}{|z|^2-1}-\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}(\frac{1}{\bar z})\Big]^2,$$

$$h_z(z)=\frac{M\bar z f'(\frac{1}{\bar z})}{(|z|^2-1)^2\Big[\frac{M\bar z}{|z|^2-1}-\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}(\frac{1}{\bar z})\Big]^2},$$

从而有

$$|\mu_{h_M}(z)|=\left|\frac{h_{\bar z}(z)}{h_z(z)}\right|=\left|\frac{\frac{M-M^2}{(|z|^2-1)^2}-\frac{1}{2}\bar z^{-2}S_f(\frac{1}{\bar z})}{M\bar z^2(|z|^2-1)^2}\right|\leqslant$$

$$|1-M|\frac{1}{|z|^2}+\frac{1}{2M}(1-\frac{1}{|z|^2})^2\cdot\frac{2\alpha k(1+(1-\alpha)\frac{1}{|z|^2})}{(1-\frac{1}{|z|^2})}=$$

$$\frac{\alpha k}{M}+\Big[|M-1|+\frac{\alpha k(1-\alpha)}{M}\Big]\frac{1}{|z|^2}.$$

由文献[11]的结果,可得 $h_M(z)$的伸缩商为

$$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant|1-M|+\frac{\alpha k}{M}.$$

因此,当 $0\leqslant k\leqslant 2\alpha-1-\sqrt{(2\alpha-1)^2-1}$时,取 $M=\frac{1+k+\sqrt{(1+k)^2-4\alpha k}}{2}$,则有$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant k$. 即 $h_M(z)$是$\frac{1+k}{1-k}$-拟共形映照. 以上的结果是不真的.

事实上,取 $M=\frac{1+k+\sqrt{(1+k)^2-4\alpha k}}{2}$时,有

$$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant|1-M|+\frac{\alpha k}{M}=1-\sqrt{(1+k)^2-4\alpha k}>k.$$

为了找到复伸张较好的延拓，对 $h_M(z)$ 的复特征进行估计．

（1）当 $M>1$ 时，有

$$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant\frac{\alpha k}{M}+\left[M-1+\frac{\alpha k(1-\alpha)}{M}\right]\frac{1}{|z|^2}.$$

（i）若 $M-1+\dfrac{\alpha k(1-\alpha)}{M}\leqslant 0$，可解得

$$1<M\leqslant\frac{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}{2}\leqslant\alpha,$$

所以，$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant\dfrac{\alpha k}{M}$. 此时，当 $M=\dfrac{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}{2}$时，有最小的伸张估计

$$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant\frac{2\alpha k}{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}.$$

（ii）若 $M-1+\dfrac{\alpha k(1-\alpha)}{M}>0$，可解得

$$M>\frac{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}{2},$$

所以，$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant\dfrac{\alpha k(2-\alpha)}{M}+M-1$. 令 $g(M)=\dfrac{\alpha k(2-\alpha)}{M}+M-1$，则 $g'(M)>0$，此时，当 $M=\dfrac{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}{2}$时，有最小的伸张估计

$$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant\frac{2\alpha k}{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}.$$

（2）当 $0<M\leqslant 1$ 时，有

$$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant\frac{\alpha k}{M}+\left[1-M+\frac{\alpha k(\alpha-1)}{M}\right]\frac{1}{|z|^2}.$$

（i）若 $1-M+\dfrac{\alpha k(1-\alpha)}{M}\leqslant 0$，可解得当 $4\alpha k(\alpha-1)\leqslant 1$ 时，有

$$0<M\leqslant\frac{1-\sqrt{1-4\alpha k(\alpha-1)}}{2},$$

或
$$\frac{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}{2}\leqslant M\leqslant 1.$$

当 $4\alpha k(\alpha-1)>1$ 时，$0<M\leqslant 1$. 所以，$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant\dfrac{\alpha k}{M}$. 此时，当 $M=1$ 时，有最小的伸张估计

$$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant\alpha k.$$

（ii）若 $1-M+\dfrac{\alpha k(1-\alpha)}{M}>0$，解得只有当 $4\alpha k(\alpha-1)\leqslant 1$ 时，有

$$\frac{1-\sqrt{1-4\alpha k(\alpha-1)}}{2}<M<\frac{1+\sqrt{1-4\alpha k(\alpha-1)}}{2}$$

故 $|\mu_{h_M}(z)|\leqslant\dfrac{\alpha k(2-\alpha)}{M}+1-4$. 令 $g(M)=\dfrac{\alpha k(2-\alpha)}{M}+1-4$，则 $g'(M)<0$. 此时，当 $4\alpha k(\alpha-1)\leqslant 1$ 时，取 $M=\dfrac{1+\sqrt{1-4\alpha k(\alpha-1)}}{2}$，有最小的伸张估计

$$|\mu_{h_M}(z)|\leqslant\frac{2\alpha k}{1+\sqrt{1-4\alpha k(\alpha-1)}}.$$

综上所述，可以得到利用上述构造拟共形延拓的方法．即当 $M=\dfrac{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}{2}$时，$h_M(z)$的

最大伸缩商是最小的,即$\dfrac{2\alpha k}{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}$.由此,可证明如下定理.

定理 1 设 f 是定义在单位圆盘 D 上的亚纯函数,且满足式(3),则当 $M=\dfrac{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}{2}$时,有

$$E_f(z)=\begin{cases} f(z), & |z|\leqslant 1, \\ f(\frac{1}{\bar{z}})+\dfrac{f'(\frac{1}{\bar{z}})}{\dfrac{M\bar{z}}{|z|^2-1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{f''}{f'}(\frac{1}{\bar{z}})}, & |z|>1, \end{cases}$$

是 $f(z)$到整个复平面上的拟共形延拓,且 $\|\mu_{h_M}(z)\|_\infty=\dfrac{2\alpha k}{1+\sqrt{1+4\alpha k(\alpha-1)}}$.

当 $\alpha=1$ 时,可以得到如下推论.

推论 1 若 f 为单位圆盘 D 上的亚纯函数,且满足式(1),则有

$$E_f(z)=\begin{cases} f(z), & |z|\leqslant 1, \\ f(\frac{1}{\bar{z}})+\dfrac{f'(\frac{1}{\bar{z}})}{\dfrac{\bar{z}}{|z|^2-1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{f''}{f'}(\frac{1}{\bar{z}})}, & |z|>1, \end{cases}$$

是 $f(z)$到整个复平面上的$\dfrac{1+k}{1-k}$-拟共形延拓.

令 N_0 表示 N 中满足就范条件 $f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0$ 的子类.对 $f(z)=z+a_3z^3+\cdots\in N_0$ 的系数进行研究,可以得到

定理 2 若 $f(z)=z+a_3z^3+\cdots$在$|z|<1$ 上满足式(2),则有$|a_3|\leqslant\dfrac{\alpha}{3}$. 其中:等号可以由极值函数 $F(z)=z+\dfrac{\alpha}{3}z^3+\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{10}z^5+\cdots$达到.

证明 由文献[11]中的定理 2.1 可得

$$\left|\frac{f''}{f'}(z)\right|\leqslant\frac{2\alpha|z|}{1-|z|^2}.$$

所以,对于$|\zeta|=1,0\leqslant r<1$ 有

$$\left|\int_0^r\frac{f''}{f'}(r\zeta)\mathrm{d}r\right|\leqslant\int_0^r\left|\frac{f''}{f'}(r\zeta)\right|\mathrm{d}r\leqslant\int_0^r\frac{2\alpha r}{1-r^2}\mathrm{d}r=-\ln(1-r^2)^\alpha.$$

由 $f'(0)=1$,可得

$$\ln|f'(z)|\leqslant|\ln f'(z)|\leqslant-\ln(1-r^2)^\alpha,$$

因此有

$$|f'(z)|(1-|z|^2)^\alpha\leqslant 1.$$

将上式代入 $f(z)$,可得

$$|1+3a_3z^2+\cdots|(1-|z|^2)^\alpha\leqslant 1.$$

经整理,两边同时平方可得

$$(1+3a_3z^2+\cdots)(1+3\bar{a}_3\bar{z}^2+\cdots)(1-C_{2\alpha}^1|z|^2+C_{2\alpha}^2|z|^4+\cdots)\leqslant 1.$$

当 $z\to 0$ 时,有

$$(1+6\mathrm{Re}(a_3z^2)+o(z^2))(1-2\alpha|z|^2+o(|z|^2))\leqslant 1,$$

整理后可得

$$\mathrm{Re}(a_3\frac{z^2}{|z|^2}+\frac{o(z^2)}{6|z|^2}\leqslant\frac{\alpha}{6},$$

所以,当 $z\to 0$ 时,$|a_3|\leqslant\dfrac{\alpha}{3}$. 证毕.

若 $f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\in N$,则有 $g(z)=\frac{1}{f(z)-a_0}=z-a_1z^3+\cdots\in N_0$. 由定理 2 可得 $|a_1|\leqslant\frac{\alpha}{3}$. 因此,有如下推论.

推论 2　设 $f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\in N$,则有 $|a_1|\leqslant\frac{\alpha}{3}$. 其中:等号可以由极值函数 $\frac{1}{F(z)}=\frac{1}{z}-\frac{\alpha}{3}z-\frac{9\alpha-\alpha^2}{90}z^3+\cdots$ 达到.

当 $\alpha=2$ 时,文献[12]对以上的结论作过相应的研究,文中的定理 2 及推论 2 推广了文献[12]的结果.

参考文献:

[1] NEHARI Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions[J]. Bull Amer Math Soc,1949,55(6):545-551.

[2] AHLFORS L,WEILL G. A uniqueness theorem for Beltrami equations[J]. Proc Amer Math Soc,1962,13:975-978.

[3] NEHARI Z. Univalence criteria depending on the Schwarzian derivative[J]. Illinois J Math,1979,23(3):345-351.

[4] GEHRING F W,POMMERENKE C. On the Nehari univalence criterion and quasicircles[J]. Comment Math Helv,1984,59(1):226-242.

[5] CHUAQUI M,OSGOOD B. Finding complete conformal metrics to extend conformal mappings[J]. Indiana University Mathematics Journal,1998,47(4):1273-1291.

[6] CHUAQUI M,OSGOOD B. Sharp distortion theorems associated with the Schwarzian derivative[J]. J London Math Soc,1993,48(2):289-298.

[7] CHUAQUI M,POMMERENKE C. Characteristic properties of Nehari functions[J]. Pacific J Math,1999,188(1):83-94.

[8] CHUAQUI M,OSGOOD B. General univalence criteria in the disk: Extensions and extremal function[J]. Ann Acad Sci Fenn,1998,23(1):101-132.

[9] CHUAQUI M,OSGOOD B. Ahlfors-Weill extensions of conformal mappings and critical points of the Poincaré metric[J]. Comment Math Helv,1994,69(1):659-668.

[10] LEHTO O. Univalent functions and Teichmüller space[M]. New York: Springer-Verlag,1987.

[11] 杨宗信,陈纪修. Nehari 函数族的偏差定理与拟共形延拓[J]. 数学年刊,2004,25(6):695-704.

[12] 杨宗信. 一类 Nehari 函数的偏差性质[J]. 数学年刊,2007,28(6):781-790.

On the Quasiconformal Extensions and Coefficients Distortion for a Nehari Class

XIE Zhi-chun, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The quasiconformal extensions for one class of Nehari functions are considered, and their dilatations are estimated. Some sharp coefficient estimates are obtained for these Nehari functions with normal condition. Our results improve the one made by Yang and Chen.

Keywords: Nehari class; Schwarzian derivative; quasiconformal extension; coefficient estimate

(**责任编辑**: 陈志贤　　**英文审校**: 张金顺，黄心中)