

文章编号: 1000-5013(2011)03-0258-05

应变能恒等法在叶片疲劳寿命分析中的应用

吕辉停, 郝艳华, 黄致建

(华侨大学 机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 根据应变能原理, 推导出一种在应变疲劳分析中计算局部应力和应变历程的应变能恒等法. 采用这种方法计算出带孔薄板应力集中处在恒幅载荷作用下的应力和应变历程, 并与弹塑性有限元和有限元局部应力应变法计算结果对比. 分析结果表明: 当应力小于材料的抗拉强度 895 MPa 时, 采用应变能恒等法计算的应变历程相对误差最大为 8.6%, 平均应力误差最大为 12%, 并且与有限元局部应力应变法计算结果非常接近. 对航空发动机叶片/榫头喉部进行了局部应变疲劳寿命分析表明, 叶片/榫头喉部应力最大处的应力已经大于材料的屈服极限.

关键词: 应变能; 应变疲劳; 应变历程; 叶片; 榫头

中图分类号: V 214.41

文献标志码: A

疲劳失效是现代航空发动机部件的主要失效形式之一, 因此对其进行疲劳强度分析具有重要意义. 局部应力应变法是估算疲劳寿命的主要方法之一, 此法关键在于局部应力应变历程的计算. 目前, 确定局部应力应变主要有实验法、弹塑性有限元法、近似计算方法等 3 种方法. 实验法直观准确, 但限制条件太多; 弹塑性有限元法精度高, 但较为复杂. 因此, 工程应用中常采用近似方法进行计算. 本文运用应变能恒等法计算带孔薄板应力集中处在恒幅载荷作用下的应力和应变历程, 并与弹塑性有限元和有限元局部应力应变法得到的局部应力和应变历程进行对比.

1 应变能恒等法的公式推导

应变能恒等法是基于等效应变能密度的近似方法, 即假设塑性区弹塑性应变能密度与采用等效线弹性模型计算得到的应变能相等, 并结合材料的循环应力应变曲线归纳出的一种近似解法, 如图 1 所示. 文献[1]推导了关于构件应力集中处单位体积内线弹性模型所做的功, 它是根据名义应力 S 与理论应力集中系数 k_t 来计算的. 然而, 由于 k_t 经验性较大, 较难确定, 因此根据弹塑性应变能原理^[2]和有限元法得到的线弹性应力, 对其进行修正, 有

$$u_e = \int_0^{\epsilon_e} \sigma d\epsilon = \frac{1}{2} \sigma_e \epsilon_e. \quad (1)$$

式(1)中: σ_e 为线弹性有限元计算的等效应力; ϵ_e 为线弹性模型的等效应力对应的应变.

当构件应力集中处所受的应力超过材料的屈服极限呈弹塑性状态时, 应力应变关系如图 1 的 OCB 所示. 单位体积内构件的弹塑性应变能为

$$u_{ep} = \int_0^{\epsilon_{ep}} \sigma d\epsilon. \quad (2)$$

第 1 次加载时, 线弹性应力从 0 达到 σ_e 值时, 真实局部应力应变服从材料单轴拉伸的循环应力应变关系, 即

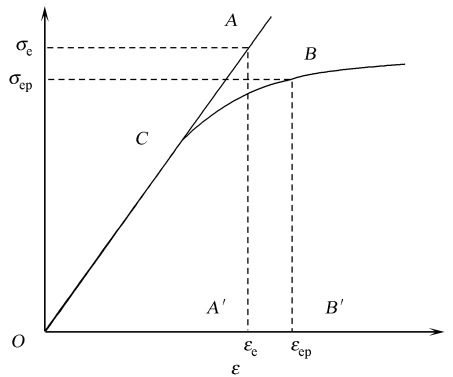


图 1 单轴拉伸循环应力-应变曲线
Fig. 1 Uniaxial stress-strain curve

收稿日期: 2010-09-25

通信作者: 郝艳华(1962-), 女, 研究员, 主要从事计算机辅助设计与分析的研究. E-mail: haoyh@hqu.edu.cn.

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{1/n'} \tag{3}$$

式(3)中: E 为材料的弹性模量; K' 为材料的循环强度系数; n' 为材料的循环硬化指数.

将式(3)代入式(2), 积分后可得

$$\begin{aligned} u_{ep} &= \int_0^{\epsilon_{ep}} \sigma d\epsilon = \sigma_{ep} \epsilon_{ep} - \int_0^{\sigma_{ep}} \epsilon d\sigma = \\ &\sigma_{ep} \left[\frac{\sigma_{ep}}{E} + \left(\frac{\sigma_{ep}}{K'}\right)^{1/n'} \right] - \int_0^{\sigma_{ep}} \left(\frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{1/n'} \right) d\sigma = \\ &\frac{\sigma_{ep}^2}{2E} + \frac{K'}{n'+1} \left(\left(\frac{\sigma_{ep}}{K'}\right)^{1+1/n'} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

由应变能恒等法的基本假设, 可得到

$$u_e = u_{ep}. \tag{5}$$

将式(1)~(4)代入式(5), 可得

$$\frac{\sigma_{ep}^2}{2E} + \frac{K'}{n'+1} \left(\left(\frac{\sigma_{ep}}{K'}\right)^{(1+1/n')} \right) = \frac{1}{2} \sigma_e \epsilon_e. \tag{6}$$

将由上式解得的 σ_{ep} 代入式(3), 可求出局部应变 ϵ_{ep} .

循环加载时, 构件应力集中处局部应力应变服从迟滞回线式, 即

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\Delta \sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{1/n'}, \tag{7}$$

并形成滞后环, 如图 2 围成的区域所示.

根据等效应变能, 以点 B 为坐标原点, 做 $\Delta \sigma$ 和 $\Delta \epsilon$ 坐标轴, 等效线弹性应力在应变历程 $\Delta \epsilon_e$ 上所产生的应变能为

$$\Delta u_e = \frac{1}{2} \Delta \sigma_e \Delta \epsilon_e - \sigma_B \Delta \epsilon_e. \tag{8}$$

式(8)中: σ_B 为点 B 的局部弹性应力; $\Delta \epsilon_e$ 为等效弹性局部应变历程.

构件进入塑性区域的真实局部应力在应变历程上产生的应变能为

$$\Delta u_{ep} = - \int_{L_{BC}} (\sigma_B - \Delta \sigma) d\Delta \epsilon = \int_0^{\Delta \epsilon_{ep}} \Delta \sigma d\Delta \epsilon - \sigma_B \Delta \epsilon_{ep}. \tag{9}$$

将式(7)代入式(9)并积分, 可得到

$$\begin{aligned} \Delta u_{ep} &= \int_0^{\Delta \epsilon_{ep}} \Delta \sigma d\Delta \epsilon - \sigma_B \Delta \epsilon_{ep} = \\ &\Delta \sigma_{ep} \Delta \epsilon_{ep} - \int_0^{\Delta \sigma_{ep}} \left(\frac{\Delta \sigma}{E} + 2 \left(\frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{1/n'} \right) d\Delta \sigma - \sigma_B \Delta \epsilon_{ep} = \\ &\frac{(\Delta \sigma_{ep})^2}{2E} + \frac{4K'}{n'+1} \left(\frac{\Delta \sigma_{ep}}{2K'} \right)^{(1+1/n')} - \sigma_B \Delta \epsilon_{ep}. \end{aligned} \tag{10}$$

式(10)中: $\Delta \sigma_{ep}$ 为弹塑性局部应力变程; $\Delta \epsilon_{ep}$ 为弹塑性局部应变历程.

根据应变能恒等法基本假设, 有

$$\Delta u_e = \Delta u_{ep}. \tag{11}$$

将式(8), (10)代入式(11), 并略掉无穷小量 $\sigma_B (\Delta \epsilon_{ep} - \Delta \epsilon_e)$, 可得到真实局部应力应变的表达式. 即

$$\frac{(\Delta \sigma_{ep})^2}{2E} + \frac{4K'}{n'+1} \left(\frac{\Delta \sigma_{ep}}{2K'} \right)^{(1+1/n')} = \frac{1}{2} \Delta \sigma_e \Delta \epsilon_e, \tag{12}$$

然后, 将式(12)解得的真实局部应力历程 $\Delta \sigma_{ep}$ 代入式(9), 便可求出真实局部应变历程 $\Delta \epsilon_{ep}$.

对于恒幅加载下试件应力集中处的平均应力 σ_m , 其表达式为

$$\sigma_m = \sigma_B - \sigma_{ep}/2, \tag{13}$$

式(13)中: σ_B 为第 1 个加载半循环终了(点 B 处)时的等效应力; σ_{ep} 为循环加载的等效应力.

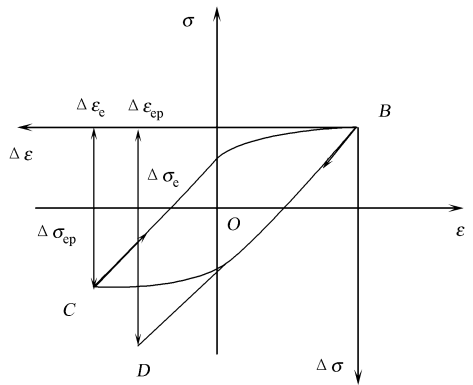


图 2 应力-应变迟滞回线曲线
Fig. 2 Stress-strain delay curve

2 有限元局部应力应变法

对于形状复杂的结构, K_f 一般不易得到. 因此, 在采用有限元局部应力应变法^[3] 计算寿命时, 近似取 $K_f=1$. 该方法进行疲劳估算的步骤与诺伯法完全相同, 只是将名义应力值由局部应力值取代. 即有

$$\sigma = \frac{(K_f S)^2}{E} = \frac{(\sigma_e)^2}{E}. \tag{14}$$

循环加载下, 将式(14)修正为

$$\Delta\sigma\Delta\epsilon = \frac{(K_f \Delta S)^2}{E} = \frac{(\Delta\sigma_e)^2}{E}. \tag{15}$$

第 1 次加载时服从应力应变曲线, 将式(4), (14)联立, 可以求得弹塑性局部应力与线弹性局部应力的关系. 即

$$\frac{\sigma_{ep}^2}{E} + \sigma_{ep} \left(\frac{\sigma_{ep}}{K}\right)^{1/n'} = \frac{\sigma_e^2}{E}. \tag{16}$$

将式(16)解得的 σ_{ep} 代入式(4), 便可求出局部应变 ϵ_{ep} . 以后各次循环加载下服从循环应力应变迟滞回线, 将式(7), (15)联立, 可得

$$\frac{\Delta\sigma_{ep}^2}{E} + 2\Delta\sigma_{ep} \left(\frac{\sigma_{ep}}{2K}\right)^{1/n'} = \frac{\Delta\sigma_e^2}{E}. \tag{17}$$

将式(17)求得的 $\Delta\sigma_{ep}$ 代入式(7), 即可求得 $\Delta\epsilon_{ep}$.

该方法中, 试件应力集中处的平均应力 σ_m 的求解也可以利用式(13)求得.

3 应变疲劳寿命计算及损伤累积准则

3.1 应变寿命计算

根据目前工程中应用较多的莫罗公式^[4] 计算应变寿命 $N_{f,i}$. 即

$$\frac{\Delta\epsilon_{ep}}{E} = \frac{(\sigma'_f - \sigma_m)}{E} (2N_{f,i})^b + \epsilon'_f (2N_{f,i})^c, \tag{18}$$

式(18)中: σ'_f 为疲劳强度系数; ϵ'_f 为疲劳延性系数; b 为疲劳强度指数; c 为疲劳延性指数.

3.2 疲劳累积损伤计算

Miner 准则是目前工程中常用的疲劳损伤准则, 应变疲劳计算即采用 Miner 准则进行载荷谱下的疲劳损伤计算.

假设试件有 m 级应力水平, 各应力水平具有 $n_i (i=1, 2, \cdots, m)$ 次循环, 该应力水平对应的等幅疲劳寿命为 $N_{f,i}$, 则 Miner 准则可表述为

$$D = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{N_{f,i}}. \tag{19}$$

4 算例

根据对带孔薄板进行线弹性及弹塑性有限元计算的结果, 利用应变能恒等法和有限元局部应力应变法计算考核部位的局部应力应变. 计算模型如图 3 所示. 分析中, 分别施加不同大小的恒幅拉伸载荷. 对应的材料(TC4 合金)的性能数据^[5]: 材料的弹性模量为 109 GPa; 抗拉强度为 895 MPa; 屈服强度为 825 MPa; 疲劳强度系数为 1.564 GPa; 疲劳强度指数为 -0.07; 疲劳延性系数为 269%; 疲劳延性指数为 -0.96; 材料的循环强度系数为 1.420 GPa; 材料的循环硬化指数为 0.07.

以弹塑性有限元应力应变的计算结果为标准, 比较不同近似方法得到的等效应变历程与平均应力的计算精度, 结果如图 4~6 所示. 其中: P 为恒幅载荷; $\Delta\epsilon_e$ 为应变幅值; $\Delta\epsilon_{ep}$ 为

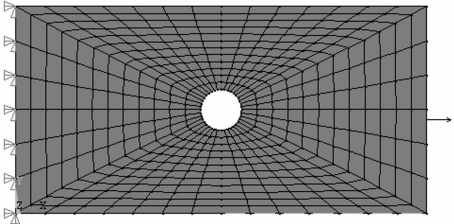


图 3 计算模型

Fig. 3 Calculating model

应变历程; $e_{\sigma_{ave}}$ 为等效应变历程与弹塑性有限元的误差; σ_{ave} 为平均应力; $e_{\sigma_{ave}}$ 平均应力相对弹塑性方法的误差.

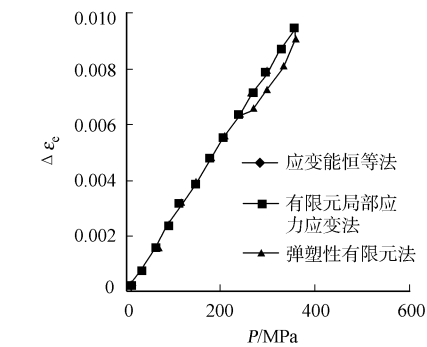


图 4 等效应变的比较
Fig. 4 Comparison of equivalent strain

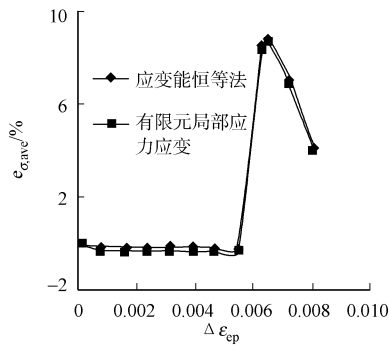


图 5 应变历程的比较
Fig. 5 Comparison of strain's history

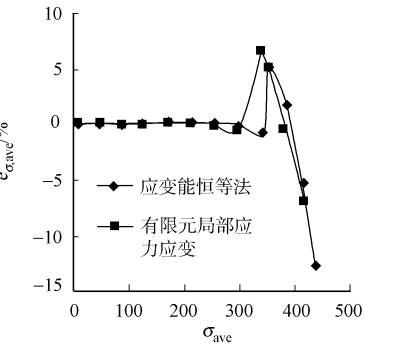


图 6 平均应力的比较
Fig. 6 Comparison of average stress

5 实例分析

针对某航空发动机风扇叶片/榫头,通过有限元计算得出榫头喉部的最大主应力部位(图 8 的点 A);利用应变能恒等法计算各种载荷下的应变历程及平均应力,利用式(18)计算各循环疲劳寿命 $N_{f,i}$,采用 Minser 损伤累积准则式(19)计算各个载荷下经历相应循环次数后的总损伤,如表 1 所示.表 1 中: n 为转速; n_i 为应力循环次数; $\Delta\sigma$ 为弹性应力幅度; σ_m 为平均应力; $\Delta\epsilon_e$ 为弹性应变幅度; $\Delta\sigma_{ep}$ 为等效应力; $\Delta\epsilon_{ep}$ 为等效应变; $N_{f,i}$ 为相应循环寿命;疲劳损伤系数为 8.53×10^{-4} .叶片/榫头材料均为 TC4 合金,屈服强度为 825 MPa,密度 $4.44\text{ Mg}\cdot\text{m}^{-3}$,其他材料参数如上.飞机载荷谱经过雨流处理和任务混沌后得到的载荷循环区间,如表 1 所示.

表 1 各项循环值计算结果

Tab. 1 Calculating results of the cycle value

$n/r\cdot\text{min}^{-1}$	n_i	$\Delta\sigma/\text{MPa}$	σ_m/MPa	$\Delta\epsilon_e/\%$	$\Delta\sigma_{ep}/\text{MPa}$	$\Delta\epsilon_{ep}/\%$	$N_{f,i}$
0~10 272~0	540	879.465	389.539 5	0.754 163	850.259 4	0.780 1	1.02×10^6
4 108~10 272~4 108	597	779.349	438.528 8	0.666 197	752.280 7	0.690 2	3.16×10^6
8 217~9 758~8 217	136	242.015	636.1452	0.206 788 3	233.600 7	0.214 3	3.60×10^{12}

在 ANSYS 软件中建立叶片/榫头实体模型,在榫头接触面上施加法向约束,榫头侧面施加轴向约束^[6],考虑气动力和离心力的影响.由于该风扇叶片属于一级叶片,不用考虑温度、蠕变效应,加载后的有限元模型如图 7 所示.计算中,采用 20 节点的 Solid 186 单元进行模拟,共有 2 983 个单元,节点数共有 12 376 个.在最大转速下,最大主应力图如图 8 所示.

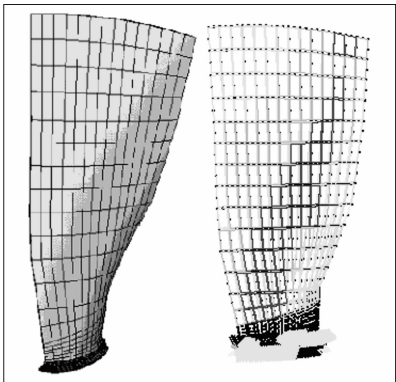


图 7 加载后的有限元模型
Fig. 7 FEM model after loading

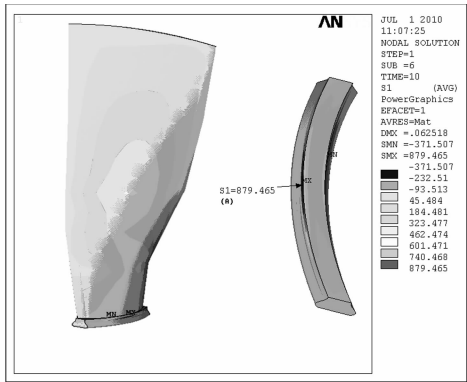


图 8 最大转速下的最大主应力云图
Fig. 8 Maximun principal stress under maximun speed

利用公式 $N=\frac{1}{D}\times 1\,000$, 计算总寿命为 1.17×10^6 h. 计算中没有考虑载荷和材料的分散性. 事实上, 载荷谱和材料的疲劳性能都存在一定的分散度. 在计算中, 寿命分散系数需根据具体情况来确定, 一般取 4~6. 为安全起见, 采用寿命分散系数为 6, 则其寿命为 1.95×10^5 h.

6 讨论

(1) 根据图 4~6 分析可见, 当应力小于材料的抗拉强度 895 MPa(即平均应力为 447.5 MPa)时, 采用应变能恒等法计算的应变历程相对误差最大只有 8.6%, 平均应力误差最大只有 12%, 并且与有限元局部应力应变法计算结果非常接近. 证明该近似方法具有较好的计算精度.

(2) 根据表 1 和图 8 分析可见, 叶片/榫头喉部应力最大处的应力已经大于材料的屈服极限. 由于应力大, 存在塑性变形, 利用应变能恒等法对叶片/榫头喉部进行局部应变疲劳寿命分析是可行的, 且具有较好的计算精度.

参考文献:

[1] 杜洪增, 田秀云, 周煊. 一种新的铝合金应变疲劳计算方法[J]. 工程力学, 2003, 20(15): 110-113.
[2] 杨佳通. 弹塑性力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980.
[3] 航空发动机设计手册总编委会. 航空发动机设计手册[M]. 北京: 航空工业出版社, 2001.
[4] 李舜酩. 机械疲劳与可靠性设计[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
[5] 北京航空材料研究所. 航空发动机设计用材料数据手册[M]. 北京: 航空工业出版社, 1990.
[6] 王相平, 徐鹤山. 有限元计算中的叶片边界条件的选取[J]. 航空发动机, 1998(4): 43-57.

Strain Energy Equivalence Method for Blade's Strain Fatigue Life Analysis

LÜ Hui-ting, HAO Yan-hua, HUANG Zhi-jian

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: According to the strain energy principle, a method for calculating amplitude of the local stress and strain in strain fatigue analysis is presented in the paper. The method, named as strain energy equivalence method, is used to calculate the amplitude of local stress and strain in the stress concentration area of plate with hole under constant-amplitude loading. It is compared with EPFEM and local stress-strain finite element method. The maximum relative error of strain's amplitude is 8.6 percent, average stress is 12 percent when the stress is lower than tensile strength, 895 MPa. The method is used to analyze local strain fatigue life of blade and dovetail's throat on the aircraft engine. The results show that the maximum stress of blade and dovetail's throat is bigger than yield limit.

Keywords: strain energy; strain fatigue; strain's amplitude; blade; dovetail

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 崔长彩)