第 32 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 32　No. 2
2011 年 3 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2011

文章编号： 1000-5013(2011)02-0231-04

复杂单摆的 KAM 理论

梁建莉，汤龙坤

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 建立了一类复杂单摆的运动方程.首先利用一个动量守恒的首次积分将二自由度系统转化为单自由度系统，然后利用 KAM 理论，将重力能量作为小扰动项，研究了复杂单摆的运动规律.研究表明：当重力能量与总能量相比很小时，或者单摆总能量充分大时，复杂单摆的 KAM 不变曲线仍然存在，整个系统做拟周期运动，扰动系统仍然具有无重力系统的运动规律.

关键词： 复杂单摆；无重力系统；KAM 理论；哈密顿系统

中图分类号： O 317；O 175.13　　　**文献标志码：** A

哈密顿动力系统的中心问题是动力学稳定性. KAM 理论是哈密顿系统研究理论发展的里程碑，它对物理学、天文学、力学等有关领域产生了深远的影响. 半个世纪以来，数学力学家在使用和研究 KAM 理论方面做了大量的工作，如直接否定了哈密顿系统遍历性的猜测，解决了长期悬而未决的特罗央小行星群运动稳定性问题. 文献[1-2]采用 KAM 理论研究了复杂双摆和陀螺仪的运动稳定性，文献[3-4]采用 KAM 理论研究了太阳系的稳定性、木星附近卫星的运动等. 本文利用 KAM 理论研究一类复杂单摆的运动性质和稳定性问题.

1　运动方程

复杂单摆的运动系统模型，如图 1 所示. 图 1 中：重物 M_1 的质量为 m_1，可沿光滑水平面移动；摆锤 M_2 的质量为 m_2，两个物体用无重杆 AB 连接，杆长为 l. 重物和单摆组成的系统具有两个自由度. 选取重物的水平位移 x 和杆 AB 偏离铅直线的角度 φ 为广义坐标.

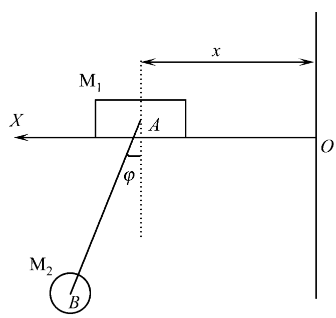

图 1　复杂单摆模型

Fig. 1　Model of the complex pendulum

设重物和单摆为两个质点，则系统动能为

$$T(\dot{x},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi).$$

式中：(x,φ)为广义坐标；$(\dot{x},\dot{\varphi})$为广义速度. 系统势能即重力势能为

$$V(x,\varphi) = m_2 gl(1-\cos\varphi).$$

由此可得系统的 Lagrange 函数为

$$L_g(x,\dot{x},\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi) - m_2 gl(1-\cos\varphi).$$

设广义动量 $p_x = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{x}}$，$p_\varphi = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{\varphi}}$，则系统的 Lagrange 函数为

$$L_g(x,p_x,\varphi,p_\varphi) = \frac{lp_x^2 + ap_\varphi^2 - 2\cos\varphi p_x p_\varphi}{2l(m_1+m_2\sin^2\varphi)} - m_2 gl(1-\cos\varphi).$$

式中：$a = \frac{m_1+m_2}{m_2 l}$. 记 $q=(x,\ \varphi)$，$p=(p_x,p_\varphi)$，由 $H_g = p\dot{q} - L_g$ 可得系统的哈密顿函数为

收稿日期： 2009-04-11

通信作者： 梁建莉(1979-)，女，讲师，主要从事哈密顿动力系统的研究. E-mail：liangjl@hqu.edu.cn.

基金项目： 国务院侨办科研基金资助项目(08QZR10)

$$H_g(x,p_x,\varphi,p_\varphi)=\frac{lp_x^2+ap_\varphi^2-2\cos\varphi p_x p_\varphi}{2l(m_1+m_2\sin^2\varphi)}+m_2gl(1-\cos\varphi).\tag{1}$$

由此,可得复杂单摆系统的哈密顿方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\partial H_g}{\partial P_x}=\frac{lp_x-\cos\varphi p_\varphi}{l(m_1+m_2\sin^2\varphi)},\\ \dot{p}_x&=-\frac{\partial H_g}{\partial x}=0,\\ \dot{\varphi}&=\frac{\partial H_g}{\partial P_\varphi}=\frac{ap_\varphi-\cos\varphi p_x}{l(m_1+m_2\sin^2\varphi)},\\ \dot{p}_\varphi&=-\frac{\partial H_g}{\partial\varphi}=\frac{m_2(lp_x-\cos\varphi p_\varphi)(\cos\varphi p_x-ap_\varphi)}{l(m_1+m_2\sin^2\varphi)^2}\cdot\sin\varphi-m_2gl\sin\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

2　无重力系统的运动

复杂单摆系统是一个不可积的哈密顿系统. 首先,研究无重力时的运动情形,即 $g=0$ 的情形. 这时系统是可积的,对应的哈密顿函数为

$$H_0=H_0(x,p_x,\varphi,p_\varphi)=\frac{lp_x^2+ap_\varphi^2-2\cos\varphi p_x p_\varphi}{2l(m_1+m_2\sin^2\varphi)}.\tag{3}$$

由能量守恒可得,系统的一个首次积分为

$$H_0(x,p_x,\varphi,p_\varphi)=h.\tag{4}$$

由式(2)可知,p_x 为常数,即重物的动量守恒. 对任意给定的 $H_0=h$,由式(3)可得局部解为

$$p_{x,\pm}=\frac{1}{l}\Big(\cos\varphi p_\varphi\pm\sqrt{(m_1+m_2\sin^2\varphi)(2l^2h-\frac{1}{m_2}p_\varphi^2)}\Big).\tag{5}$$

将式(5)代入式(2),消去 p_x 可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx}&=-\frac{1}{m_2l}\left[m_2\cos\varphi\mp p_\varphi\sqrt{\frac{m_1+m_2\sin^2\varphi}{2l^2h-\frac{1}{m_2}p_\varphi^2}}\right],\\ \frac{dp_\varphi}{dx}&=-\frac{\sin\varphi}{l}\left[p_\varphi\mp m_2\cos\varphi\sqrt{\frac{2l^2h-\frac{1}{m^2}p_\varphi^2}{m_1+m_2\sin^2\varphi}}\right].\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

记 $p_{x,\pm}=\Lambda_{0,\pm}(\varphi,p_\varphi)$,则有

$$\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{\partial\Lambda_{0,\pm}(\varphi,p_\varphi)}{\partial p_\varphi},$$
$$\frac{dp_\varphi}{dx}=\frac{\partial\Lambda_{0,\pm}(\varphi,p_\varphi)}{\partial\varphi}.$$

即系统(6)是以 $\Lambda_{0,\pm}(\varphi,p_\varphi)$ 为哈密顿函数的哈密顿系统,此系统的一个首次积分为

$$p_{x,\pm}=\Lambda_{0,\pm}(\varphi,p_\varphi)=h_1.\tag{7}$$

系统(6)有一族平衡点$(\bar{\varphi},\bar{p}_\varphi)$,则有

$$\bar{\varphi}\in[-\pi,\pi],\qquad\bar{p}_\varphi^2=\frac{2m_2^2l^2h\cos^2\bar{\varphi}}{m_1+m_2}.$$

这些平衡点都是不稳定的平衡点,并且构成相平面上的两条连续曲线.

系统(6)的平衡点对应的两个特殊值为

$$h_1=\bar{p}_{x,\pm}=\Lambda_{0,\pm}(\bar{\varphi},\bar{p}_\varphi)=\pm\sqrt{2h(m_1+m_2)},$$

这样就对应两族点,构成两条连续曲线为

$$\begin{cases}L_1:\varphi=\bar{\varphi},\qquad p_\varphi=m_2l\cos\bar{\varphi}\sqrt{\dfrac{2h}{m_1+m_2}},\qquad p_x=\sqrt{2h(m_1+m_2)}.\\ L_2:\varphi=\bar{\varphi},\qquad p_\varphi=-m_2l\cos\bar{\varphi}\sqrt{\dfrac{2h}{m_1+m_2}},\qquad p_x=-\sqrt{2h(m_1+m_2)}.\end{cases}$$

当参数 h 和 h_1 固定时，对任意 x，式(4)，(7)定义了两个二维流形．把式(4)定义的二维流形记作 $M_0(x)$，称为等能量面，$M_0(x)$同胚于一个二维环面 T^2；把式(7)定义的二维流行记作 M_{h_1}．当 h 和 h_1 给定后，一个具体的运动对应于上述两个二维流形的交线，它通常是一条或两条闭曲线，把它们称为 h_1-曲线. 通过分析，可以得到如下 4 点结论．

(1) 当 $h_1=\sqrt{2h(m_1+m_2)}$ 或 $h_1=-\sqrt{2h(m_1+m_2)}$ 时，环面 $M_0(x)$上 h_1-曲线为曲线 L_1 或 L_2，它是环面 $M_0(x)$上的一条闭曲线.

(2) 当 $h_1=0$ 时，由式(4)可得

$$p_\varphi=\pm l\sqrt{\frac{2m_2h(m_1+m_2\sin^2\varphi)}{m_1+m_2}},$$

环面 $M_0(x)$上 h_1-曲线是两条互不相交的闭曲线，它们分别是环面 $M_0(x)$的外赤道和内赤道.

(3) 当 $-\sqrt{2h(m_1+m_2)}<h_1<\sqrt{2h(m_1+m_2)}$ 时，环面 $M_0(x)$上的 h_1-曲线是两条互不相交的闭曲线. 一条几乎位于 $M_0(x)$的外半部，同伦于 $M_0(x)$的外赤道；而另一条几乎位于 $M_0(x)$的内半部，同伦于 $M_0(x)$的内赤道.

(4) 当 $h_1^2>2h(m_1+m_2)$时，环面 $M_0(x)$和流形 M_{h_1} 不相交，解不存在.

从全局看，系统(6)的积分曲线正好代表了等能量面 $M_0(x)$上的 h_1-曲线. 积分曲线被曲线 L_1 和 L_2 分成两部分，其中一部分闭曲线在 $M_0(x)$的外半部，同伦于 $M_0(x)$的外赤道；一部分位于 $M_0(x)$的内半部，同伦于 $M_0(x)$的内赤道. 在每种运动过程中，角 φ 沿相同方向重复变化，所有闭曲线关于 φ 都是系统(6)的周期解.

系统的作用变量 $I(h_1)$可由以下过程求出．即

$$I(h_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda_{0,\pm}}p_\varphi\mathrm{d}\varphi=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a}\left[h_1\cos\varphi\pm\sqrt{\frac{(m_1+m_2\sin^2\varphi)(2(m_1+m_2)h-h_1^2)}{m_2}}\right]\mathrm{d}\varphi=$$

$$b\sqrt{2(m_1+m_2)h-h_1^2}.$$

其中：$b=\pm\dfrac{1}{2a\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\frac{m_1+m_2\sin^2\varphi}{m_2}}\mathrm{d}\varphi\neq0$. 由上式不难算出

$$h'_1(I)=-\frac{I}{b^2h_1(I)},$$

$$h''_1(I)=-\frac{b^2h_1^2(I)+I^2}{b^4h_1^3(I)}\neq0.$$

即该系统满足柯尔莫哥洛夫非退化条件.

3　KAM 理论

对系统(2)，哈密顿函数可以写为

$$H_g(x,p_x,\varphi,p_\varphi)=H_0(x,p_x,\varphi,p_\varphi)+gH_1(x,\varphi). \tag{8}$$

其中：$H_1(x,\varphi)=m_2l(1-\cos\varphi)$，对应于 φ 以 2π 为周期. 对于任意 $H_g=h_g\in\mathbf{R}^+$，式(8)等价于

$$H_\varepsilon(x,\tilde{p}_x,\varphi,\tilde{p}_\varphi)=H_0(x,\tilde{p}_x,\varphi,\tilde{p}_\varphi)+\varepsilon H_1(x,\varphi)=1. \tag{9}$$

其中：$\tilde{p}_x=p_x/\sqrt{h_g}$；$\tilde{p}_\varphi=p_\varphi/\sqrt{h_g}$；$\varepsilon=g/h_g$.

当能量 h_g 很大时，$\varepsilon H_1(x,\varphi)$很小，这样复杂单摆系统就可以看作是无重力运动的周期扰动. 如果存在

$$H_\varepsilon(x,\tilde{p}_x,\varphi,\tilde{p}_\varphi)=h, \tag{10}$$

对于固定的 $h\in\mathbf{R}^+$ 和 x，则式(10)定义了一个等能量面 $M_\varepsilon(x)$. 对于充分小的 $\varepsilon>0$，它同胚于二维环面 T^2. 由式(10)可局部解得

$$\tilde{p}_{x,\pm}=\Lambda_\pm(\varphi,\tilde{p}_\varphi)=$$

$$\frac{1}{l}\left[\cos\varphi\tilde{p}_{\varphi}\pm\sqrt{(m_1+m_2\sin^2\varphi)(2l^2(h-\varepsilon m_2 l(1-\cos\varphi))-\frac{1}{m_2}\tilde{p}_{\varphi}^2)}\right]=$$

$$\Lambda_{0,\pm}(\varphi,\tilde{p}_{\varphi})+\varepsilon\Lambda_{1,\pm}(\varphi,\tilde{p}_{\varphi}),$$

$$\Lambda_{1,\pm}(\varphi,\tilde{p}_{\varphi})=\mp\frac{2m_2 l^2(1-\cos\varphi)\sqrt{m_1+m_2\sin^2\varphi}}{\sqrt{2l^2(h-\varepsilon m_2 l(1-\cos\varphi))-\frac{1}{m_2}\tilde{p}_{\varphi}^2}+\sqrt{2l^2 h-\frac{1}{m_2}\tilde{p}_{\varphi}^2}}.$$

由此可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial\Lambda_{\pm}(\varphi,\tilde{p}_{\varphi})}{\partial\tilde{p}_{\varphi}}=-\dfrac{\partial\Lambda_{0,\pm}(\varphi,\tilde{p}_{\varphi})}{\partial\tilde{p}_{\varphi}}-\varepsilon\dfrac{\partial\Lambda_{1,\pm}(\varphi,\tilde{p}_{\varphi})}{\partial\tilde{p}_{\varphi}},\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{p}_{\varphi}}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial\Lambda_{\pm}(\varphi,\tilde{p}_{\varphi})}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial\Lambda_{0,\pm}(\varphi,\tilde{p}_{\varphi})}{\partial\varphi}+\varepsilon\dfrac{\partial\Lambda_{1,\pm}(\varphi,\tilde{p}_{\varphi})}{\partial\varphi}.\end{cases}$$

已证明无重力系统即未扰系统的每个解关于 φ 都是周期解，始终在不变环面上，解的周期取决于相轨线的位置. 由于 $\Lambda_{0,\pm}(\varphi,p_{\varphi})$ 满足柯尔莫哥洛夫非退化条件，由 KAM 理论可得如下结论.

定理 1　对扰动系统(9)，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，扰动系统的轨线仍保持在不变环面上.

4　结论

从相平面上看，对于未扰系统的平衡曲线，扰动系统也有相应的固定曲线，它们对应于关于 φ 的周期解. 在固定曲线周围的大部分不变曲线仍然存在情况下，与未扰系统的不变曲线相比，其仅仅发生了微小形变，但破裂的曲线也构成稠密集.

同样，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，扰动系统也存在与未扰系统的不变环面相对应的不变环面，其上的流是拟周期流，并且此不变环面充分接近未扰系统的不变环面. 扰动系统的不变曲线存在表明，扰动系统仍然具有无重力系统的运动规律.

参考文献：

[1]　胡志兴，管克英. 复杂双摆的 KAM 定理[J]. 高校应用数学学报：A 辑，1999，14(2)：147-154.

[2]　胡志兴，管克英. 陀螺仪运动的混沌与 KAM 理论[J]. 应用数学学报，2000，23(2)：212-220.

[3]　ARNOLD V I. Mathematical methods of classical mechanics[M]. New York：Springer-Verlag，1978.

[4]　程崇庆，孙义燧. 哈密顿系统中的有序和无序运动[M]. 上海：上海科技出版社，1996.

KAM Theory of the Complex Pendulum

LIANG Jian-li, TANG Long-kun

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract:　The motions of a complex pendulum is studied in this paper. A two degrees systems is transformed into a single degree system by means of a momentum conservation. The system is studied by treating the gravitation as a small perturbation in KAM theory. It is shown that when the gravitational energy is small compared with the total energy, or the total energy is sufficiently large, there still exists the KAM invariant curves. It is also shown that the system is a quasi-periodic system and the motions of the gravity-free system can be kept to the perturbation system.

Keywords:　complex pendulum; gravity-free system; KAM theory; Hamiltonian system

(**责任编辑：**陈志贤　　**英文审校：**张金顺，黄心中)