文章编号： 1000-5013(2011)02-0222-04

Beurling-Ahlfors 扩张伸张函数在非光滑摄动下的稳定性

林峰

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 给出一种非光滑摄动的定义，讨论 M-拟对称函数 $h(x)$ 发生非光滑摄动时，伸张函数 $D(z)$ 的稳定性问题．证明在边界值发生这种摄动时，边界值的 M-拟对称性保持不变，其 Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数也具有稳定性，同时得到该伸张函数的误差估计式．

关键词： Beurling-Ahlfors 扩张；伸张函数；非光滑摄动；稳定性

中图分类号： O 174.5　　**文献标志码：** A

设 $h(x)$ 是实轴上的连续递增函数，$h(\infty)=\infty$，如果满足所谓的 M-条件，即

$$M^{-1}\leqslant\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}\leqslant M,\qquad \forall\, x\in\mathbf{R},\quad t>0,$$

则称 $h(x)$ 是 M-拟对称函数．复函数 $\phi(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，有

$$u(x,y)=\frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}h(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$v(x,y)=\frac{1}{2y}\left(\int_{x}^{x+y}h(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}h(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

称 $\phi(z)$ 为 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张，函数 $h(x)$ 称为 $\phi(z)$ 的边界函数或边界值，记

$$D(z)=\frac{|\phi_z|+|\phi_{\bar z}|}{|\phi_z|-|\phi_{\bar z}|},$$

则 $D(z)$ 称为 $\phi(z)$ 的伸张函数[1-2]．

在假设 M-拟对称函数 $h(x)$ 满足某种条件下，文献[2]讨论了 Beurling-Ahlfors 扩张及其伸张函数的某些性质．对于任意 $x\in\mathbf{R}$，存在 $\varepsilon_x>0$，当 $0<t<\varepsilon_x$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{h(x+t)-h(x)}{t}\geqslant K_+>0,\\&\frac{h(x)-h(x-t)}{t}\geqslant K_->0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式(1)中：K_+ 和 K_- 是与 x 无关的常数．在假设 M-拟对称函数 $h(x)$ 满足上述条件下，文献[3]讨论了当边界值 $h(x)$ 发生光滑摄动时，伸张函数 $D(z)$ 的稳定性问题．本文讨论 $h(x)$ 发生非光滑摄动时，伸张函数 $D(z)$ 的稳定性问题．以下均假设 M-拟对称函数 $h(x)$ 满足上述条件(1)，并记 $K=\min(K_+,K_-)$．

1　问题的提出

以 $\Omega(\mathbf{R})$ 表示 $\mathbf{R}$ 上满足 Lipschitz 条件的有界连续函数类．对任意 $\omega\in\Omega(\mathbf{R})$，存在只与 ω 有关的非负数 δ，使得对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$，有

收稿日期： 2009-06-24

通信作者： 林峰(1962-)，男，副教授，主要从事函数论的研究．E-mail：lfeng@hqu.edu.cn．

基金项目： 福建省自然科学基金资助项目(2007J0183)

$$|\omega(x)-\omega(y)|\leqslant\delta|x-y|.$$

显然，$\Omega(\mathbf{R})$是线性空间. 在其上定义范数为

$$\|\omega\|_1=\|\omega\|_0+\|\omega\|_{0,1}.$$

其中：$\|\omega\|_0=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|\omega(x)|$；$\|\omega\|_{0,1}=\inf\delta$.

设 $\rho_0>0$，记 $B(\rho_0)=\{\omega\in\Omega(\mathbf{R})\mid\|\omega\|_1<\rho_0\}$. 对于 $\omega\in B(\rho_0)$，称 $h_\omega(x)=h(x)+\omega(x)$为 $h(x)$的非光滑摄动. 以 $\Psi(z)$表示 $h_\omega(x)$的 Beurling-Ahlfors 扩张，$D_\omega(z)$表示 $\Psi(z)$的伸张函数，如果

$$\lim_{\|\omega\|_1\to 0}|D_\omega(z)-D(z)|=0$$

在上半平面一致成立，则称伸张函数 $D(z)$关于边界值的非光滑摄动是稳定的[4-5].

2　预备知识

引理 1[3]　对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 及任意 $t>0$，有

$$\begin{cases}\dfrac{h(x+t)-h(x)}{t}\geqslant K,\\[2mm]\dfrac{h(x)-h(x-t)}{t}\geqslant K.\end{cases}$$

引理 2　设 $\omega\in\Omega(\mathbf{R})$，则对于任意 $a,b\in\mathbf{R}$，有

$$|\omega(b)-\omega(a)|\leqslant\|\omega\|_1|b-a|.$$

证明　对任意 $\eta>0$，由定义可得

$$|\omega(b)-\omega(a)|\leqslant(\|\omega\|_{01}+\eta)|b-a|.$$

由 η 的任意性，可得

$$|\omega(b)-\omega(a)|\leqslant\|\omega\|_{01}|b-a|\leqslant\|\omega\|_1|b-a|.$$

证毕.

3　主要结果

引理 3　当 $\rho_0<K$ 时，$h_\omega(x)$是$\dfrac{KM+\rho_0}{K-\rho_0}$拟对称函数，于是有

$$D_\omega(z)\leqslant 2\left(\frac{KM+\rho_0}{K-\rho_0}\right).$$

证明　对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，根据引理 1，2 有

$$h_\omega(x_2)-h_\omega(x_1)=h(x_2)-h(x_1)+\omega(x_2)-\omega(x_1)\geqslant$$
$$K(x_2-x_1)-\|\omega\|_1(x_2-x_1)\geqslant(K-\rho_0)(x_2-x_1)>0.$$

由此可知，$h_\omega(x)$为连续递增函数，$h(\infty)=\infty$.

下面证明 $h_\omega(x)$满足所谓的$\dfrac{KM+\rho_0}{K-\rho_0}$条件. 首先，对任意 $x\in\mathbf{R}$，及任意 $t>0$，利用引理 2，有

$$\frac{h_\omega(x+t)-h_\omega(x)}{h_\omega(x)-h_\omega(x-t)}=\frac{h(x+t)-h(x)+\omega(x+t)-\omega(x)}{h(x)-h(x-t)+\omega(x)-\omega(x-t)}=$$
$$\left[\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}+\frac{\omega(x+t)-\omega(x)}{h(x)-h(x-t)}\right]\Big/\left[1+\frac{\omega(x)-\omega(x-t)}{h(x)-h(x-t)}\right]\leqslant$$
$$\left[M+\frac{\|\omega\|_1 t}{Kt}\right]\Big/\left[1-\frac{\|\omega\|_1 t}{Kt}\right]\leqslant\left[M+\frac{\rho_0}{K}\right]\Big/\left[1-\frac{\rho_0}{K}\right]=\frac{KM+\rho_0}{K-\rho_0}.$$

仿照上述证明，可得

$$\frac{h_\omega(x+t)-h_\omega(x)}{h_\omega(x)-h_\omega(x-t)}\geqslant\left(\frac{KM+\rho_0}{K-\rho_0}\right)^{-1}.$$

于是，$h_\omega(x)$满足所谓的$\dfrac{KM+\rho_0}{K-\rho_0}$条件，从而有[6]

$$D_\omega(z)\leqslant 2\left(\frac{KM+\rho_0}{K-\rho_0}\right).$$

证毕.

引理 4 $|\Psi_z-\phi_z|\leqslant\sqrt{2}\ \|\omega\|_1$, $|\Psi_{\bar{z}}-\phi_{\bar{z}}|\leqslant\sqrt{2}\ \|\omega\|_1$.

证明 记 $\Psi_z-\phi_z=U(x,y)+\mathrm{i}V(x,y)$,不难得到

$$U(x,y)=\frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}\omega(t)\mathrm{d}t,$$

$$V(x,y)=\frac{1}{2y}\left(\int_{x}^{x+y}\omega(t)\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}\omega(t)\mathrm{d}t\right).$$

$\Psi_z-\phi_z$ 具有一阶连续偏导数,由求导的链式法则,可得

$$\Psi_z-\phi_z=\frac{1}{2}[(\Psi-\phi)_x-\mathrm{i}(\Psi-\phi)_y]=\frac{1}{2}(U_x+\mathrm{i}V_x-\mathrm{i}U_y+V_y),\tag{2}$$

$$\Psi_{\bar{z}}-\phi_{\bar{z}}=\frac{1}{2}[(\Psi-\phi)_x+\mathrm{i}(\Psi-\phi)_y]=\frac{1}{2}(U_x+\mathrm{i}V_x+\mathrm{i}U_y-V_y),\tag{3}$$

$$U_x=\frac{1}{2y}(\omega(x+y)-\omega(x-y)),\tag{4}$$

$$U_y=-\frac{1}{2y^2}\int_{x-y}^{x+y}\omega(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2y}(\omega(x+y)+\omega(x-y)),\tag{5}$$

$$V_x=\frac{1}{2y}(\omega(x+y)-2\omega(x)+\omega(x-y)),\tag{6}$$

$$V_y=-\frac{1}{2y^2}\left(\int_{x}^{x+y}\omega(t)\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}\omega(t)\mathrm{d}t\right)+\frac{1}{2y}(\omega(x+y)-\omega(x-y)).\tag{7}$$

由此容易估计出 $|U_x|\leqslant\|\omega\|_1$, $|U_y|\leqslant\|\omega\|_1$, $|V_x|\leqslant\|\omega\|_1$, $|V_y|\leqslant\|\omega\|_1$.

事实上,选其中的一个给出估计过程为

$$U_y=\frac{1}{2y}(\omega(x+y)+\omega(x-y))-\frac{1}{2y^2}\int_{x-y}^{x+y}\omega(t)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2y}\omega(x+y)-\frac{1}{2y^2}\int_{x}^{x+y}\omega(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2y}\omega(x-y)-\frac{1}{2y^2}\int_{x-y}^{x}\omega(t)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2y}(\omega(x+y)-\omega(x+\theta_1 y)+\frac{1}{2y}(\omega(x-y)-\omega(x-\theta_2 y)),\qquad 0<\theta_1,\theta_2<1.$$

于是,利用引理 2 有

$$|U_y|\leqslant\left|\frac{1}{2y}(\omega(x+y)-\omega(x+\theta_1 y)\right|+\left|\frac{1}{2y}(\omega(x-\theta_2 y)-\omega(x-y))\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{2y}\|\omega\|_1(1-\theta_1)y+\frac{1}{2y}\|\omega\|_1(1-\theta_2)y\leqslant\|\omega\|_1,$$

由式(2)有

$$|\Psi_z-\phi_z|^2\leqslant\frac{1}{2}(|U_x|^2+|U_y|^2+|V_x|^2+|V_y|^2)\leqslant 2\|\omega\|_1^2,$$

$$|\Psi_z-\phi_z|\leqslant\sqrt{2}\|\omega\|_1.$$

同理,由式(3)可得

$$|\Psi_{\bar{z}}-\phi_{\bar{z}}|\leqslant\sqrt{2}\|\omega\|_1.$$

证毕.

引理 5[3] 对上半平面中的任意 z,有 $|\phi_z|-|\phi_{\bar{z}}|\geqslant\dfrac{K}{2M+1}$.

定理 1 当 $\rho_0<K$ 时,有

$$\lim_{\|\omega\|_1\to 0}|D_\omega(z)-D(z)|=0$$

在上半平面一致成立,即 $D(z)$ 是稳定的. 其误差估计式为

$$|D_\omega(z)-D(z)|\leqslant\frac{4\sqrt{2}(2K+1)(KM+\rho_0)}{K(K-\rho_0)}\|\omega\|_1.$$

证明 经化简可得

$$|D_\omega(z)-D(z)|=\left|\frac{|\Psi_z|+|\Psi_{\bar z}|}{|\Psi_z|-|\Psi_{\bar z}|}-\frac{|\phi_z|+|\phi_{\bar z}|}{|\phi_z|-|\phi_{\bar z}|}\right|=$$

$$2\left|\frac{|\Psi_z||\phi_{\bar z}|-|\phi_z||\Psi_{\bar z}|}{(|\Psi_z|-|\Psi_{\bar z}|)(|\phi_z|-|\phi_{\bar z}|)}\right|.$$

利用引理 4,可得

$$||\Psi_z||\phi_{\bar z}|-|\phi_z||\Psi_{\bar z}||\leqslant||\Psi_z||\phi_{\bar z}|-|\Psi_z||\Psi_{\bar z}|+|\Psi_z||\Psi_{\bar z}|-|\phi_z||\Psi_{\bar z}||\leqslant$$

$$|\Psi_{\bar z}-\phi_{\bar z}||\Psi_z|+|\Psi_z-\phi_z||\Psi_{\bar z}|\leqslant\sqrt{2}\,\|\omega\|_1(|\Psi_z|+|\Psi_{\bar z}|),$$

于是,可得

$$|D_w(z)-D(z)|\leqslant\frac{2\sqrt{2}\,\|\omega\|_1(|\Psi_z|+|\Psi_{\bar z}|)}{(|\phi_z|-|\phi_{\bar z}|(|\Psi_z|-|\Psi_{\bar z}|)}=\frac{2\sqrt{2}\,\|\omega\|_1}{(|\phi_z|-|\phi_{\bar z}|)}D_\omega(z).$$

利用引理 3,5,可得

$$|D_w(z)-D(z)|\leqslant\frac{2\sqrt{2}\,\|\omega\|_1}{\dfrac{K}{2M+1}}2\left(\frac{KM+\rho_0}{K-\rho_0}\right)=\frac{4\sqrt{2}(2M+1)(KM+\rho_0)}{K(K-\rho_0)}\|\omega\|_1,$$

且有

$$\lim_{\|\omega\|_1\to 0}|D_\omega(z)-D(z)|=0$$

在上半平面一致成立. 证毕.

参考文献:

[1]　郑学良. Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数与 ID-同胚[J]. 数学学报,2002,45(5):1036-1040.

[2]　林峰. Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数的边界极限性质[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2004,25(4):352-355.

[3]　林峰. Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数关于边界值的稳定性[J]. 南昌大学学报:理科版,2005,29(5):432-434.

[4]　王小林,龚亚方. 一类奇异积分和 Cauchy 积分关于积分曲线的稳定性[J]. 数学学报,1999,42(2):343-350.

[5]　ZHANG Hong-mei, WANG Chuan-rong, ZHU Yu-can. Stability of solutions to Hilbert boundary value problem under perturbation of the boundary curve[J]. J Math Anal Appl, 2003(284):601-617.

[6]　LEHTINEN M. The dilatation of Beurling-Ahlfors extension quasisymmetric function[J]. Ann Avad Sci Fenn Ser AI Math, 1983, 8(1):187-191.

Stability of Dilatation Function of Beurling-Ahlfors Extension Under Non-Smooth Perturbation

LIN Feng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, a definition of non-smooth perturbation is given. The stability of dilatation function of its Beurling-Ahlfors extension is diecussed under the invariant of *M*-quasisymmetric function. The corresponding error estimate is obtained.

Keywords: Beurling-Ahlfors extension; dilatation function; non-smooth perturbation; stability

(**责任编辑**: 陈志贤　　**英文审校**: 张金顺, 黄心中)