第 32 卷　第 2 期　　华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)　　Vol. 32　No. 2
2011 年 3 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2011

文章编号: 1000-5013(2011)02-0218-05

一类双调和映照的单叶半径估计

夏小青，黄心中

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要: 若 F 为单位圆 $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ 上的双调和映照，$L=z\dfrac{\partial}{\partial z}-\bar{z}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$，即 L 是一个线性复算子. 利用单位圆上有界调和函数的系数估计不等式，对双调和映照 $L(F)$ 的单叶半径进行估计，所得到的结果优于 Chen 和 Ponnusamy 等的结果.

关键词: Landau 定理；双调和映照；线性复算子；单叶半径

中图分类号: O 174.5　　**文献标志码:** A

1　预备知识

定义在区域 $D\subset C$ 上的二阶连续可导复值函数 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 称为调和的，是指 f 的 Laplace 算子为 0，即 $\Delta f=4f_{z\bar{z}}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，$z=x+\mathrm{i}y$. 区域 D 上的四阶连续可微复值函数 $F=u+\mathrm{i}v$ 称为双调和的，当且仅当 F 的 Laplace 算子是调和的，即 $\Delta(\Delta F)=0$.

单连通区域 D 上的双调和映照 $F=r^2G+K$. 其中：G,K 均为 D 上的调和映照[1]. D 上的调和映照 G,K 又可表示为：$G=g_1+\bar{g}_2$，$K=k_1+\bar{k}_2$. 其中：g_1,g_2,k_1,k_2 都是 D 上的解析函数[2]. 若单位圆 $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ 上的双调和映照 F，可表示为 $F=r^2G+K$ 满足 $F(0)=K(0)=0$，$J_K(0)=1$，且 $|G(z)|<M$，$|K(z)|<M$，文[3]证明当 $|z|\leqslant\rho$ 时，F 是单叶的. 其中：ρ 是方程 $\dfrac{\pi}{4M}-2\rho M-2M\dfrac{2\rho}{(1-\rho)^2}=0$ 的解.

文献[4]研究双调和映照的 L 算子即 $L(F)$ 的单叶半径问题，其中 L 是一个线性复算子，$L=z\dfrac{\partial}{\partial z}-\bar{z}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$，$L(F)$ 保持了双调和性[1]. 文献[4]证明了如下两个定理.

定理 A　假设 $F=r^2G+K$ 是单位圆 $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ 上的双调和映照，且满足 $F(0)=K(0)=0$，$J_K(0)=1$. 其中：G,K 都是 D 上的有界调和映照. $|G(z)|<M$，$|K(z)|<M$，M 是常数，则存在常数 ρ_1 $(0<\rho_1<1)$，使 $L(F)$ 在 $D_{\rho_1}=\{z\,|\,|z|<\rho_1\}$ 上单叶. 这里，ρ_1 是方程

$$\frac{\pi}{4M}-\frac{6M\rho_1^2}{(1-\rho_1)^2}-\frac{4M\rho_1^3}{(1-\rho_1)^3}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho_1-\frac{4M\rho_1}{(1-\rho_1)^3}=0$$

的解. 其中：$m_1\approx 6.059$，是函数 $\dfrac{2-x^2+\dfrac{4}{\pi}\arctan x}{x(1-x^2)}$，$0<x<1$ 的最小值，$L(F)(D_{\rho_1})$ 包含一个单叶圆 D_R，有

$$R_1=\rho_1\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{2M\rho_1^2}{(1-\rho_1)^2}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho_1\right].$$

定理 B　假设 $F=r^2G$ 是单位圆 $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ 上的双调和映照，且满足 $G(0)=0$，$J_G(0)=1$. 其中：G 是 D 上的有界调和映照，$|G(z)|<M$，M 是常数. 则存在常数 ρ_2 $(0<\rho_2<1)$，使得 $L(F)$ 在 $D_{\rho_2}=$

收稿日期: 2009-10-11

通信作者: 黄心中(1957-)，男，教授，主要从事函数论的研究. E-mail：huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金项目(2008J0195)

$\{z||z|<\rho_2\}$上单叶．这里，ρ_2 是方程

$$\frac{\pi}{4M}-\frac{48M}{\pi^2}m_1\arctan\rho_2-\frac{4M\rho_2}{(1-\rho_2)^3}=0$$

的解．其中：m_1 同定理 A，$L(F)(D_{\rho_2})$包含一个单叶圆 D_R，有

$$R_2=\rho_2^3\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho_2\right].$$

继续对以上两个定理的单叶半径问题进行研究，进一步估计 $L(F)$的单叶半径，改进了文献[4]相应的结果.

单位圆 $D=\{z||z|<1\}$上的复值函数 f 的 Jacobian 记为 J_f，即 $J_f=|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2$. 记 $\lambda_f=||f_z|-|f_{\bar z}||$，$\Lambda=|f_z|+|f_{\bar z}|$．若 f 是调和映照，Lewy[5]指出，它是局部单叶的当且仅当 $J_f(z)\neq0$，$z\in D$.

引理 A　即 Schwarz 引理[6-7]．设 f 是单位圆 D 上的调和映照，且 $f(0)=0$，$f(D)\subset D$，则 $\Lambda_f(z)\leqslant\frac{4(1+|f(z)|}{\pi(1-|z|^2)}$，且$|f(z)|\leqslant\frac{4}{\pi}\arctan(|z|)\leqslant\frac{4}{\pi}|z|$，$z\in D$.

引理 B[8]　假设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$是单位圆 D 上的调和映照，h，g 是 D 上的解析函数，具有幂级数展开式 $h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$．如果 $J_f(0)=1$，$|f(z)|<M$，则有$|a_n|$，$|b_n|\leqslant\sqrt{M^2-1}$，且$|a_n|+|b_n|\leqslant\sqrt{2M^2-2}$，$n=2,3,\cdots$.

2　主要结果及证明

定理 1　假设 $F=r^2G+K$ 是单位圆 $D=\{z||z|<1\}$上的双调和映照，且满足 $F(0)=K(0)=0$，$J_K(0)=1$. 其中：G，K 都是 D 上的有界调和映照，且$|G(z)|<M$，$|K(z)|<M$，M 是常数，则存在常数 $\rho_3(0<\rho_3<1)$，使得 $L(F)$在 $D_{\rho_3}=\{z||z|<\rho_3\}$上单叶．这里，$\rho_3$ 是方程

$$\frac{\pi}{4M}-\frac{3\sqrt{2}M\rho_3^2}{(1-\rho_3)^2}-\frac{2\sqrt{2}M\rho_3^3}{(1-\rho_3)^3}-\frac{2\sqrt{2M^2-2}\rho_3}{(1-\rho_3)^3}-\frac{\sqrt{2M^2-2}(2\rho_3-\rho_3^2)}{(1-\rho_3)^2}=0$$

的解，且 $L(F)(D_{\rho_3})$包含一个单叶圆 D_R，有

$$R_3=\rho_3\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{\sqrt{2}M\rho_3^2}{(1-\rho_3)^2}-\frac{\sqrt{2M^2-2}(2\rho_3-\rho_3^2)}{(1-\rho_3)^2}\right].$$

证明　$F=r^2G+K$，因为 L 是线性且 $L(|z|^2)=0$，故可令 $H:=L(F)=|z|^2L(G)+L(K)$. 其中：$G(z)=g_1+\bar g_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=0}^{\infty}\bar b_n\bar z^n$，$K(z)=k_1+\bar k_2=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\bar d_nz^n$，$z\in D$. 则有

$$H_z=2|z|^2G_z+|z|^2zG_{zz}-\bar z^2G_{\bar z}+K_z+zK_{zz},$$

$$H_{\bar z}=-2|z|^2G_{\bar z}-|z|^2\bar zG_{\bar z\bar z}+\bar z^2G_z-K_{\bar z}-\bar zK_{\bar z\bar z}.$$

由引理 A 可知，$\lambda_K(0)=\frac{J_K(0)}{\Lambda_K(0)}=\frac{1}{\Lambda_K(0)}\geqslant\frac{\pi}{4M}$；而由引理 B 可知，$|c_n|+|d_n|\leqslant\sqrt{2M^2-2}$，$n=2,3,\cdots$. 对于 $G(z)$的系数估计，则证明如下引理．

引理 C　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$是单位圆 D 上的调和映照．其中：h，g 是 D 上的解析函数，具有幂级数展开式 $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$，且$|f(z)|<M$，则有$|a_n|+|b_n|\leqslant\sqrt{2}M$，$n=1,2,\cdots$.

证明　固定 $r\in(0,1)$，则有

$$f(r\exp(\mathrm{i}\theta))=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\exp(\mathrm{i}n\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}\bar b_nr^n\exp(-\mathrm{i}n\theta),\qquad\theta\in[0,2,\pi].$$

由$|f(z)<M|$可得

$$|a_0+\bar b_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)r^{2n}=1/2\pi\int_0^{2\pi}|f(r\exp(\mathrm{i}\theta))|^2\mathrm{d}\theta\leqslant M^2.$$

令 $r\rightarrow1$，由此可得$|a_n|^2+|b_n|^2\leqslant M^2$，$n=1,2,\cdots$. 即有$|a_n|+|b_n|\leqslant\sqrt{2}M$，$n=1,2,\cdots$. 由引理 C，可知 $G(z)$的系数有估计$|a_n|+|b_n|\leqslant\sqrt{2}M$，$n=1,2,\cdots$成立.

下面证明 $H(z)$ 的单叶性问题.

固定 $0<\rho<1$,要证明 H 在 D_ρ 上的单叶性,任取 D_ρ 上的两点 z_1,z_2,用 γ 表示线段 $[z_1,z_2]$,则有

$$|H(z_1)-H(z_2)|=\left|\int_\gamma H_z\mathrm{d}z+H_{\bar z}\mathrm{d}\bar z\right|\geqslant\left|\int_\gamma K_z(0)\mathrm{d}z-K_{\bar z}(0)\mathrm{d}\bar z\right|-$$

$$2\left|\int_\gamma |z|^2(G_z\mathrm{d}z-G_{\bar z}\mathrm{d}\bar z)\right|-\left|\int_\gamma |z|^2(zG_{zz}\mathrm{d}z-\bar zG_{\bar z\bar z}\mathrm{d}\bar z)\right|-\left|\int_\gamma zK_{zz}\mathrm{d}z-\bar zK_{\bar z\bar z}\mathrm{d}\bar z\right|-$$

$$\left|\int_\gamma z^2G_z\mathrm{d}\bar z-\bar z^2G_{\bar z}\mathrm{d}z\right|-\left|\int_\gamma (K_z-K_z(0))\mathrm{d}z+(K_{\bar z}-K_{\bar z}(0))\mathrm{d}\bar z\right|\geqslant$$

$$|z_1-z_2|\{\lambda_K(0)-2\sum_{n=1}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)\rho^{n+1}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(|a_n|+|b_n|)\rho^{n+1}-$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(|c_n|+|d_n|)\rho^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)\rho^{n+1}-\sum_{n=2}^{\infty}n(|c_n|+|d_n|)\rho^{n-1}\}\geqslant$$

$$|z_1-z_2|\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{3\sqrt{2}M\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{2\sqrt{2}M\rho^3}{(1-\rho)^3}-\frac{2\sqrt{2M^2-2}\rho}{(1-\rho)^3}-\frac{\sqrt{2M^2-2}(2\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}\right].$$

取 $0<\rho_3<1$ 为 $\frac{\pi}{4M}-\frac{3\sqrt{2}M\rho_3^2}{(1-\rho_3)^2}-\frac{2\sqrt{2}M\rho_3^3}{(1-\rho_3)^3}-\frac{2\sqrt{2M^2-2}\rho_3}{(1-\rho_3)^3}-\frac{\sqrt{2M^2-2}(2\rho_3-\rho_3^2)}{(1-\rho_3)^2}$ 的最小正解,则 H 在 D_{ρ_3} 上是单叶的,且在 ∂D_{ρ_3} 上有

$$|H(z)|=||z|^2(zG_z-\bar zG_{\bar z})+(zK_z-\bar zK_{\bar z})|\geqslant$$

$$|zK_z(0)-\bar zK_{\bar z}(0)|-|z(K_z-K_z(0))-\bar z(K_{\bar z}-K_{\bar z}(0))|-||z|^2(zG_z-\bar zG_{\bar z})|\geqslant$$

$$\rho_3\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{\sqrt{2}M\rho_3^2}{(1-\rho_3)^2}-\frac{\sqrt{2M^2-2}(2\rho_3-\rho_3^2)}{(1-\rho_3)^2}\right]=R_3.$$

从证明的过程中可看出,定理1中的 ρ_3 一定比定理A中的 ρ_1 大,从而定理1的结论比定理A的结论好.相应于定理B,有如下定理.

定理2 假设 $F=r^2G$ 是单位圆 $D=\{z||z|<1\}$ 上的双调和映照,且满足 $G(0)=0$,$J_G(0)=1$. 其中:G 是 D 上的有界调和映照,$|G(z)|<M$, M 是常数,则存在常数 $\rho_4(0<\rho_4<1)$,使得 $L(F)$ 在 $D_{\rho_4}=\{z||z|<\rho_4\}$ 上单叶. 这里,D_{ρ_4} 是方程

$$\frac{\pi}{4M}-\frac{3\sqrt{2M^2-2}(2\rho_4-\rho_4^2)}{(1-\rho_4)^2}-\frac{2\sqrt{2M^2-2}\rho_4}{(1-\rho_4)^3}]=0$$

的解,且 $L(F)(D_{\rho_4})$ 包含一个单叶圆 D_{R_4},有

$$R_4=\rho_4^3\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{\sqrt{2M^2-2}(2\rho_4-\rho_4^2)}{(1-\rho_4)^2}\right].$$

证明 令 $G(z)=g_1+\overline{g_2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\bar b_n\bar z^n$,$z\in D$. 由引理A可知,$\lambda_G(0)\geqslant\frac{\pi}{4M}$;而由引理 B 可知,$|a_n|+|b_n|\leqslant\sqrt{2M^2-2}$,$n=2,3,\cdots$. 令 $H:=L(F)=|z|^2L(G)$,则有

$$H_z=2|z|^2G_z+|z|^2zG_{zz}-\bar z^2G_{\bar z},$$
$$H_{\bar z}=-2|z|^2G_{\bar z}-|z|^2\bar zG_{\bar z\bar z}-z^2G_z,$$

固定 $0<\rho<1$,要证明 H 在 D_ρ 上的单叶性,任取 D_ρ 上的两个不同的点 z_1,z_2,用 γ 表示线段 $[z_1,z_2]$,$z=\gamma(t)=z_1+t(z_2-z_1)(0\leqslant t\leqslant1)$,则有

$$|H(z_1)-H(z_2)|=\left|\int_\gamma H_z\mathrm{d}z+H_{\bar z}\mathrm{d}\bar z\right|=\left|\int_\gamma 2|z|^2(G_z\mathrm{d}z-G_{\bar z}\mathrm{d}\bar z)+(z^2G_z\mathrm{d}\bar z-\bar z^2G_{\bar z}\mathrm{d}z)+\right.$$

$$\left.|z|^2(zG_{zz}\mathrm{d}z-\bar zG_{\bar z\bar z}\mathrm{d}\bar z)\right|\geqslant\left|\int_\gamma G_z(0)(2|z|^2\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}\bar z)-G_{\bar z}(0)(2|z|^2\mathrm{d}\bar z+\bar z^2\mathrm{d}z)\right|-$$

$$\left|\int_\gamma 2|z|^2[(G_z-G_z(0))\mathrm{d}z-(G_{\bar z}-G_{\bar z}(0))\mathrm{d}\bar z]\right|-$$

$$\left|\int_\gamma |z|^2[\frac{z}{\bar z}(G_z-G_z(0))\mathrm{d}\bar z-\frac{\bar z}{z}(G_{\bar z}-G_{\bar z}(0))\mathrm{d}z]\right|-\left|\int_\gamma |z|^2(zG_{zz}\mathrm{d}z-\bar zG_{\bar z\bar z}\mathrm{d}\bar z)\right|\geqslant$$

$$|z_1-z_2|(\int_0^1|z|^2\mathrm{d}t)\{\frac{\pi}{4M}-3\sum_{n=2}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)\rho^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(|a_n|+|b_n|)\rho^{n-1}\}\geqslant$$

$$|z_1-z_2|\left(\int_0^1|z|^2\mathrm{d}t\right)\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{3\sqrt{2M^2-2}(2\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}-\frac{2\sqrt{2M^2-2}\rho}{(1-\rho)^3}\right].$$

取 $0<\rho_4<1$ 为$\frac{\pi}{4M}-\frac{3\sqrt{2M^2-2}(2\rho_4-\rho_4^2)}{(1-\rho_4)^2}-\frac{2\sqrt{2M^2-2}\rho_4}{(1-\rho_4)^3}=0$ 的最小正解，则 H 在 D_{ρ_4} 上单叶，且在∂D_{ρ_4} 上有

$$|H_z|=||z|^2(zG_z-\bar{z}G_{\bar{z}})|=||z|^2(zG_z(0)-\bar{z}G_{\bar{z}}(0))|-$$

$$||z|^2[z(G_z-G_z(0))-\bar{z}(G_{\bar{z}}-G_{\bar{z}}(0))]|\geqslant\rho_4^3\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{\sqrt{2M^2-2}(2\rho_4-\rho_4^2)}{(1-\rho_4)^2}\right]=R_4.$$

参考文献：

[1] ABDULHADI Z, MUHANNA Y A, KHURI S. On some properties of solutions of the biharmonic equation[J]. Appied Mathematics and Computation, 2006, 177(1): 346-351.

[2] DUREB P. Harmonic mappings in the plane[M]. Cabridge: Cabridge Univ Press, 2004.

[3] ABDULHADI Z, MUHANNA Y A. Landau's theorem for biharmonic mappings[J]. J Math Anal Appl, 2008, 338(1): 705-709.

[4] CHEN S. PONNUSAMY S, WANG X. Landau's theorem for certain biharmonic mappings[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 208(2): 427-433.

[5] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1936, 42(10): 689-692.

[6] CHEN H H, GAUTHIER P M, HENGARTNER W. Bloch constants for planar harmonic mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 128(11): 3231-3240.

[7] HUANG Xin-zhong. Estimates on Bloch constants for planar harmonic mappings[J]. J Math Anal Appl, 2007, 337(2): 880-887.

[8] LIU Ming-sheng. Landau's theorem for planar harmonic mappings[J]. Computers and Mathematics with Appications, 2009, 57(7): 1142-1146.

[9] LIU Ming-sheng. Estimates on bloch constants for planar harmonic mappings[J]. Science in China Series (A): Mathematics, 2008, 52(1): 87-93.

[10] LIU Ming-sheng. Landau's theorems for biharmonic mappings[J]. Comlex Variables and Elliptic Equations, 2008, 53(9): 843-855.

On the Estimates of Univalent Radius for Certain Biharmonic Mappings

XIA Xiao-qing, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Let F be a biharmonic mapping on the unit disk D, $L=z\frac{\partial}{\partial z}-\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$, it is a linear complex operator, using the coefficient inequalities for bounded harmonic mappings, we obtain a better univalent radius for biharmonic mappings $L(F)$. Our results improve the one made by Chen and Ponnusamy.

Keywords: landau theorem; biharmonic mapping; linear complex operator; univalent radius

（**责任编辑：**陈志贤　　**英文审校：**张金顺，黄心中）

第 32 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 32　No. 2
2011 年 3 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2011

文章编号：1000-5013(2011)02-0222-04

Beurling-Ahlfors 扩张伸张函数在非光滑摄动下的稳定性

林峰

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 给出一种非光滑摄动的定义，讨论 M-拟对称函数 $h(x)$ 发生非光滑摄动时，伸张函数 $D(z)$ 的稳定性问题．证明在边界值发生这种摄动时，边界值的 M-拟对称性保持不变，其 Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数也具有稳定性，同时得到该伸张函数的误差估计式.

关键词： Beurling-Ahlfors 扩张；伸张函数；非光滑摄动；稳定性

中图分类号： O 174.5　　**文献标志码：** A

设 $h(x)$ 是实轴上的连续递增函数，$h(\infty)=\infty$，如果满足所谓的 M-条件，即

$$M^{-1}\leqslant\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}\leqslant M,\qquad \forall x\in\mathbf{R},\quad t>0,$$

则称 $h(x)$ 是 M-拟对称函数. 复函数 $\phi(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，有

$$u(x,y)=\frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t,$$

$$v(x,y)=\frac{1}{2y}\left(\int_{x}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}h(t)\mathrm{d}t\right).$$

称 $\phi(z)$ 为 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张，函数 $h(x)$ 称为 $\phi(z)$ 的边界函数或边界值，记

$$D(z)=\frac{|\phi_z|+|\phi_{\bar z}|}{|\phi_z|-|\phi_{\bar z}|},$$

则 $D(z)$ 称为 $\phi(z)$ 的伸张函数[1-2].

在假设 M-拟对称函数 $h(x)$ 满足某种条件下，文献[2]讨论了 Beurling-Ahlfors 扩张及其伸张函数的某些性质. 对于任意 $x\in\mathbf{R}$，存在 $\varepsilon_x>0$，当 $0<t<\varepsilon_x$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{h(x+t)-h(x)}{t}\geqslant K_+>0,\\&\frac{h(x)-h(x-t)}{t}\geqslant K_->0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式(1)中：K_+ 和 K_- 是与 x 无关的常数. 在假设 M-拟对称函数 $h(x)$ 满足上述条件下，文献[3]讨论了当边界值 $h(x)$ 发生光滑摄动时，伸张函数 $D(z)$ 的稳定性问题. 本文讨论 $h(x)$ 发生非光滑摄动时，伸张函数 $D(z)$ 的稳定性问题. 以下均假设 M-拟对称函数 $h(x)$ 满足上述条件(1)，并记 $K=\min(K_+,K_-)$.

1　问题的提出

以 $\Omega(\mathbf{R})$ 表示 $\mathbf{R}$ 上满足 Lipschitz 条件的有界连续函数类．对任意 $\omega\in\Omega(\mathbf{R})$，存在只与 ω 有关的非负数 δ，使得对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$，有

收稿日期： 2009-06-24

通信作者： 林峰(1962-)，男，副教授，主要从事函数论的研究. E-mail：lfeng@hqu.edu.cn.

基金项目： 福建省自然科学基金资助项目(2007J0183)