第 32 卷　第 1 期
2011 年 1 月

华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)

Vol. 32　No. 1
Jan. 2011

文章编号：　1000-5013(2011)01-0109-04

布朗单增量“快点”集的 Packing 维数

邱志平[1]，林火南[2]

(1. 华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021；
2. 福建师范大学 数学与计算机科学学院，福建 福州 350007)

摘要： 讨论布朗单样本轨道的重分形分析问题，通过构造一个上极限型分形集的方法，得到其不同的增量形式“快点”集的 Packing 维数结果. 当 $T>0$，$0\leqslant\alpha<1$，$E_T(\alpha)$时，有 $\mathrm{Dim}(E_T(\alpha))=N$，$\mathrm{Dim}(F_T(\alpha))=N$，$\mathrm{Dim}(G_T(\alpha))=N$,a. s.. 当 $0<\alpha<1$ 时，$E_T(\alpha)$,$F_T(\alpha)$和 $G_T(\alpha)$ 的 Hausdorff 维数与其 Packing 维数不相等.

关键词： 布朗单；“快点”集；Packing 维数；重分形分析
中图分类号： O 552.1　　**文献标识码：** A

布朗单作为布朗运动在多指标情形的自然发展形式,在多指标随机过程研究中最具重要性和典型性,已得到了许多结果[1-6]. 重分形分析的目的在于更加细腻地量化几何测度的奇异结构. 文[4]得到了布朗单的重对数律和一致连续模,文[5-6]在文[4]的基础上更深入地研究了布朗单,讨论那些使其重对数律不成立(即重对数律失败)的所谓“快点”集合的重分形分析性质,得到布朗单沿坐标方向增量、局部增量和矩形增量 3 种增量形式“快点”集的 Hausdorff 维数. 本文与文[5-6]类似,进一步探讨布朗单样本轨道的重分形分析性质.

1　预备知识

约定在同一完备概率空间(Ω,F,P)上讨论问题. 用 $\mathbf{R}_+^N=[0,+\infty)$表示指标空间;$s=(s_1,s_2,\cdots,s_N)$,$t=(t_1,t_2,\cdots,t_N)$等表示 $\mathbf{R}_+^N$ 上的点;$s<t$ 表示 $s_i<t_i$,$i=1,2,\cdots,N$,并记$[s,t]=\prod_{i=1}^N[s_i,t_i]$. 它表示 $\mathbf{R}_+^N=[0,+\infty)^N$ 上的 N 维超方体,记 $\delta(s,t)=|[0,s]\Delta[0,t]|$. 其中:$|E|$表示集合 E 的 N 维 Lebesgue 测度，$A\Delta B$ 表示集合 A 与 B 的对称差. 令

$$M_n=\{\prod_{i=1}^N[2^{-n}m_i,2^{-n}(m_i+1)),0\leqslant m_i\leqslant 2^n-1,\text{且 } m_i\in\mathbf{Z}\}.$$

它表示$[0,1]^N$ 中边长为 2^{-n},且其边平行于坐标轴的左闭右开 $\mathbf{N}$ 维立方体的集合. 有时 $\boldsymbol{c}$ 表示分量同为常数 c 的向量,即 $\boldsymbol{c}=(c,c,\cdots,c)$.

设 $\varphi:[0,\mathrm{e}^{-1}]\to[0,+\infty)$为单调递增连续函数,且 $\varphi(0)=0$. 对于任意集合 $E\subseteq\mathbf{R}^d$,令

$$\varphi-p^*(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\{\sum_i\varphi(2r_i):B(x_i,r_i)\text{ 两两不变},x_i\in E,r_i\leqslant\varepsilon\}.$$

其中:$B(x,r)$表示是以 x 为圆心,r 为半径的球.

显然,$\varphi-p^*(E)$不是一个距离外测度,更不是测度[7]. 经过修正后,记

$$\varphi-p(E)=\inf\{\sum_n\varphi-p^*(E_n):E\subseteq\bigcup_n E_n\},$$

则 $\varphi-p(E)$是一个测度,并称 $\varphi-p(E)$为 E 的 Packing 测度. 定义 E 的 Packing 维数为

$$\mathrm{Dim}(E)=\inf\{\alpha>0:s^\alpha-p(E)=0\}=\sup\{\alpha>0:s^\alpha-p(E)=+\infty\}.$$

收稿日期： 2009-02-25
通信作者： 邱志平(1979-),男,讲师,主要从事随机过程理论及应用的研究. E-mail:qzp@hqu.edu.cn.
基金项目： 华侨大学科研基金资助项目(08HZR20)

有关 Packing 测度和 Packing 维数的有关性质,参见文[7].

设 $W=\{W(s):s\in\mathbf{R}_+^N\}$是定义在$(\Omega,F,P)$上的零均值的高斯过程,若满足

$$E[W(s)W(t)]=(s_1\wedge t_1)(s_2\wedge t_2)\cdots(s_N\wedge t_N),\qquad \forall s,t\in\mathbf{R}_+^N,$$

$$W(s_1,s_2,\cdots,s_N)=0,\qquad \forall s=(s_1,s_2,\cdots,s_N)\in\mathbf{R}_+^N,\quad s_1,s_2,\cdots,s_N=0,$$

则称 $W=\{W(s):s\in\mathbf{R}_+^N\}$为布朗单.

引理 1[8] 如果对$\forall n\geqslant 1$,V_n 是$[0,1]^N$ 中的开集且在$[0,1]^N$ 中稠密,则 $\mathrm{Dim}(\bigcap_n V_n)=N$.

2 主要结果及其证明

考虑布朗单沿坐标方向增量"快点"集的 Packing 维数.

定理 1 设 $T>0$,$0\leqslant\alpha<1$,$E_T(\alpha)$的表达式为

$$E_T(\alpha)=\{s\in(0,T]^N:\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|W(s_1,\cdots,s_{N-1},s_N+h)-W(s)|}{\Psi(h)\sqrt{s_1,s_2,\cdots,s_{N-1}}}\geqslant\alpha\},\tag{1}$$

则 $\mathrm{Dim}(E_T(\alpha))=N$, a. s.

证明 仅对 $N=2$ 的情况结予证明,$N>2$ 的情况类似可得.设 $T=1$,$\alpha_1\in(\alpha_0,1)$,$\delta_n=n2^{-n}(n\geqslant 1)$.定义一族服从(0-1)分布的随机变量序列$\{Z_I\}_{I\in M_n}(n\geqslant 1)$.对于 $I=[(i,j)2^{-n},(i,j)2^{-n}+\langle 2^{-n}\rangle)$,则有 $Z_I=1$,当且仅当

$$|W((i+1)2^{-n},j2^{-n}+\delta_n)-W((i+1)2^{-n},j2^{-n})|\geqslant\alpha_1\sqrt{2\delta_n\log\delta_n^{-1}}\sqrt{(i+1)2^{-n}}.$$

由布朗单的一致连续模结果及矩形增量的一致连续模结果[4],可知几乎处处地存在 $n_0=n_0(\omega)$,使得当 $n\geqslant n_0(\omega)$时,对于$\forall I\in M_n$,$\forall s\in I$,有

$$|W(s_1,s_2+\delta_n)-W(s_1,j2^{-n}+\delta_n)|\leqslant 2\Psi((i+1)2^{-n}),$$

$$|W(s_1,s_2)-W(s_1,j2^{-n})|\leqslant 2\Psi((i+1)2^{-n}),$$

$$|W([(s_1,j2^{-n}),((i+1)2^{-n},j2^{-n}+\delta_n)])|\leqslant 2\Psi(\delta_n 2^{-n}).$$

若 $Z_I=1$,则当 n 充分大之后,有

$$\begin{aligned}|W(s_1,s_2+\delta_n)-W(s_1,s_2)|\geqslant&|W(i2^{-n},j2^{-n}+\delta_n)-W(i2^{-n},j2^{-n}+\delta_n)|-\\&|W(s_1,s_2)-W(s_1,j2^{-n})|-|W(s_1,s_2+\delta_n)-W(s_1,j2^{-n}+\delta_n)|-\\&|W([s_1,j2^{-n}),((i+1)2^{-n},j2^{-n}+\delta_n)]|\geqslant\\&\alpha_1\sqrt{2\delta_n\log\delta_n^{-1}}\sqrt{(i+1)2^{-n})}-4\Psi((i+1)2^{-2n})-2\Psi(\delta_n 2^{-n})\geqslant\\&\alpha_0\sqrt{2\delta_n\log\delta_n^{-1}}\sqrt{(i+1)2^{-n})}\geqslant\\&\alpha_0\sqrt{2\delta_n\log\delta_n^{-1}}\sqrt{s_1}.\end{aligned}\tag{2}$$

令

$$A(n)=\bigcup\{I:I\in M_n,Z_I=1\},$$

$$A=\limsup_{n\to\infty}A(n)=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A(k).$$

由式(2)可得,$A\subseteq E_1(\alpha_0)$,记 $V_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A^0(k)$.其中:$A^0(k)$为 $A(k)$的内点集.对于固定 m,$I\in M_m$,由文[9]中的式(2.3),存在正有限常数 c_1 和 c,使得当 n 充分大且 $k\geqslant n$ 时,有

$$\begin{aligned}P(A^0(k)I=\varnothing)\leqslant&P(\forall J\subseteq I,J\in M_k,Z_J=0)\leqslant\\&c_1(P(|W((i+1)2^{-k},j2^{-k}+\delta_k)-W((i+1)2^{-k},j2^{-k})|<\\&\alpha_1\sqrt{2\delta_k\log\delta_k^{-1}}\sqrt{(i+1)2^{-k}}))^{2^{k-m}/k}=\\&c_1(P(|N(0,1)|<\alpha_1\sqrt{2\log\delta_k^{-1}}))^{2^{k-m}/k}\leqslant\\&c_1(1-c(\frac{2^k}{k})^{-\alpha_1^2})^{2^{k-m}/k}\leqslant c_1(\exp\{-\frac{k^{\alpha_1^2-1}}{2^{k(\alpha_1^2-1)}}\})^c.\end{aligned}$$

于是,有

$$\sum_k P(A^0(k)I=\varnothing)<\infty,$$

从而由 Borel-Cantelli 引理，可得 $P(V_n I=\varnothing)=0$，因而 V_n 在 $[0,1]^2$ 内几乎处处稠密且为 $[0,1]^2$ 的开集，由引理 1 可得

$$\mathrm{Dim}(E_1(\alpha_0))=2,\qquad \text{a. s.}$$

定理得证.

考虑布朗单局部增量“快点”集的 Packing 维数.

定理 2　设 $T>0$，$0\leqslant\alpha<1$，$F_T(\alpha)$ 的表达式为

$$F_T(\alpha)=\{s\in(0,T]^N:\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|W(s+h)-W(s)|}{\Psi(\delta(s,s+h))}\geqslant\alpha\},\tag{3}$$

则 $\mathrm{Dim}(E_T(\alpha))=N$，a. s.

证明　仅对 $N=2$ 的情况证明，$N>2$ 的情况类似可证得. 设 $T=1$，$\alpha_1\in(\alpha_0,1)$，$\delta_n=n2^{-n}(n\geqslant 1)$. 定义一族服从 $(0-1)$ 分布的随机变量序列 $\{Z_I\}_{I\in M_n}(n\geqslant 1)$：对于 $I=[(i,j)2^{-n},(i,j)2^{-n}+\langle 2^{-n}\rangle)$，有 $Z_I=1$，当且仅当

$$|W((i+1)2^{-n}+\delta_n,(j+1)2^{-n}+\delta_n)-W((i+1)2^{-n},(j+1)2^{-n})|\geqslant$$
$$\alpha_1\Psi(\delta(((i+1)2^{-n},(j+1)2^{-n}),((i+1)2^{-n}+\delta_n,(j+1)2^{-n}+\delta_n))).$$

由布朗单的一致连续模结果[4]可知，几乎处处地存在 $n_0=n_0(\omega)$，使得当 $n\geqslant n_0(\omega)$ 时，对 $\forall I\in M_n$，$\forall s\in I$，有

$$|W((i+1)2^{-n},s_2)-W(s_1,s_2)|\leqslant 2\Psi((i+1)2^{-2n}),$$
$$|W((i+1)2^{-n},(j+1)2^{-n}-W(i+1)2^{-n},s_2)|\leqslant 2\Psi((j+1)2^{-2n}),$$
$$|W((i+1)2^{-n}+\delta_n,s_2+\delta_n)-W(s_1+\delta_n,s_2+\delta_n)|\leqslant 2\Psi(\delta_n 2^{-n}+(j+1)2^{-2n}),$$
$$|W((i+1)2^{-n}+\delta_n,s_2+\delta_n)-W((i+1)2^{-n}+\delta_n,(j+1)2^{-n}+\delta_n)|\leqslant$$
$$2\Psi(\delta_n 2^{-n}+(i+1)2^{-2n}).$$

若 $Z_I=1$，当 n 充分大之后，则有

$$|W(s_1,s_2+\delta_n)-W(s_1,s_2)|\geqslant|W((i+1)2^{-n}+\delta_n,(j+1)2^{-n}+\delta_n)-$$
$$W((i+1)2^{-n},(j+1)2^{-n})|-|W((i+1)2^{-n},s_2)-W(s_1,s_2)|-$$
$$|W((i+1)2^{-n},(j+1)2^{-2n})-W((i+1)2^{-n},s_2)|-$$
$$|W((i+1)2^{-n}+\delta_n,s_2+\delta_n)-W(s_1+\delta_n,s_2+\delta_n)|-$$
$$|W((i+1)2^{-n}+\delta_n,s_2+\delta_n)-W((i+1)2^{-n}+\delta_n,(j+1)2^{-n}+\delta_n)|\geqslant$$
$$\alpha_1\Psi(\delta(((i+1)2^{-n},(j+1)2^{-n}),((i+1)2^{-n}+\delta_n,(j+1)2^{-n}+\delta_n)))-2\Psi((i+1)2^{-2n})-$$
$$2\Psi((j+1)2^{-2n})-2\Psi((\delta_n 2^{-n}+(j+1)2^{-2n})-2\Psi(\delta_n 2^{-n}+(i+1)2^{-2n})\geqslant$$
$$\alpha_0\Psi(\delta(((i+1)2^{-n},(j+1)2^{-n}),((i+1)2^{-n}+\delta_n,(j+1)2^{-n}+\delta_n)))\geqslant$$
$$\alpha_0\Psi(\delta(s,s+\langle\delta_n\rangle)).\tag{4}$$

令

$$A(n)=\bigcup\{I:I\in M_n,Z_I=1\},$$
$$A=\limsup_{n\to\infty}A(n)=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A(k).$$

由式(4)可得，$A\subseteq F_1(\alpha_0)$. 记 $V_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A^0(k)$，$A^0(k)$ 为 $A(k)$ 的内点集. 对于固定 m，$I\in M_m$，由文[9]中的式(2.3)，存在正有限常数 c_1 和 c，使得当 n 充分大且 $k\geqslant n$ 时，则有

$$P(A^0(k)I=\varnothing)\leqslant P(\forall J\subseteq I,J\in M_k,Z_J=0)\leqslant$$
$$c_1[P(|W((i+1)2^{-k}+\delta_k,(j+1)2^{-k}+\delta_k)-W((i+1)2^{-k},(j+1)2^{-k})|<$$
$$\alpha_1\Psi(\delta(((i+1)2^{-n},(j+1)2^{-n}),((i+1)2^{-n}+\delta_n,(j+1)2^{-n}+\delta_n)))]^{2^{k-m}/k}\leqslant$$
$$c_1[P(|N(0,1)<\alpha_1\sqrt{2\log\delta^{-1}((i2^{-k},j2^{-k}),(i2^{-k}+\delta_k,j2^{-k}+\delta_k))}]^{2^{k-m}/k}\leqslant$$
$$c_1(1-c(\delta((i2^{-k},j2^{-k}),(i2^{-k}+\delta_k,j2^{-k}+\delta_k)))^{\alpha_1^2})^{2^{k-m}/k}\leqslant$$

$$c_1(1-c2^{-2k\alpha_1^2})^{2^{k-m}/k} \leqslant c_1(\exp\{-\frac{1}{k2^{2k(\alpha_1^2-1)}}\})^c.$$

于是,有

$$\sum_k P(A^0(k)I=\emptyset)<\infty.$$

从而由 Borel-Cantelli 引理,可得 $P(V_nI=\emptyset)=0$,因而 V_n 在$[0,1]^2$ 内几乎处处稠密且为$[0,1]^2$ 的开集. 由引理得 $\mathrm{Dim}(F_1(\alpha_0))=2$,a. s. 定理得证.

最后,给出布朗单矩形增量"快点"集的 Packing 维数.

定理 3 设 $T>0$,$0\leqslant\alpha<1$,$G_T(\alpha)$的表达式为

$$G_T(\alpha)=\{s\in(0,T]^N: \limsup_{h\downarrow 0}\frac{|W((s,s+h])|}{\Psi(|(s,s+h]|)}\geqslant\alpha\}, \tag{5}$$

则 $\mathrm{Dim}(G_T(\alpha))=N$ a. s.

证明 由文[6]定理2及引理1即可得.

参考文献:

[1] EHM W. Sample function properties of mutli-parameter stable processes[J]. Z Wahrscheinlichkeitsheorie Verw Gebiete,1981,56(2):195-228.

[2] 林火南. Wiener 单的局部时和水平集的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学:A辑,2000,30(10):869-880.

[3] KHOSHNEVISAN D,SHI Z. Brownian sheet and capacity[J]. Ann Probab,1999,27(3):1135-1159.

[4] OREY S,PRUITT N E. Sample function of the N-parameter Wiener process[J]. Ann Probab,1973,1(1):138-163.

[5] 黄群,林火南. 布朗单样本轨道的重分形分析[J]. 福建师范大学学报:自然科学版,2003,19(2):1-8.

[6] 黄群. 布朗单的矩形增量快点集 Hausdorff 维数[J]. 莆田学院学报:自然科学版,2007,14(2):34-37.

[7] FALCONER K J. Fractal geometry-mathematical foundations and application[M]. New York:John Wiley & Sons,1990.

[8] DEMBO A,PERES Y,ROSEN J,et al. Thick points for spatial Brownian motion: Multifractal analysis of occupation measure[J]. Ann Probab,2000,28(1):1-35.

[9] OREY S,TAYLOR S J. How often on a Brownian path does the law of iterated logarithm fail[J]. Proc London Math Soc,1974,28(1):174-192.

Packing Dimension of "Fast Point" Sets for Brownian Sheet

QIU Zhi-ping[1], LIN Huo-nan[2]

(1. School of Mathematical Sciencs, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China
2. College of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)

Abstract: The multifractal analysis for the sample paths of Brownian sheet is discussed in the paper. The packing dimensions of "fast point" sets with different increment forms of Brownian sheet are given by constructing a random fractals of limsup type. If $T>0$, $0\leqslant\alpha<1$, $E_T(\alpha)$, then $\mathrm{Dim}(E_T(\alpha))=N$, $\mathrm{Dim}(F_T(\alpha))=N$, $\mathrm{Dim}(G_T(\alpha))=N$,(a. s.). The Hausdorff dimensions of $E_T(\alpha)$, $F_T(\alpha)$ and $G_T(\alpha)$ isn't equal to their packing dimensions if $0<a<1$.

Keywords: Brownian sheet; "fast point" sets; packing dimension; multifractal analysis

(**责任编辑**:陈志贤 **英文审校**:张金顺,黄心中)