

文章编号: 1000-5013(2011)01-0103-06

广义 Logistic 型泛函微分方程零解的全局吸引性

汪东树, 王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究广义 Logistic 型泛函微分方程 $x'(t) + [1 + x(t)]F(t, x[\cdot]^a) = 0 (t \geq 0, a \geq 1)$ 零解的全局吸引性. 运用一些分析方法和技巧, 对该方程的零解作出估计, 得到方程零解是全局吸引的一些充分条件, 结果推广并改进了现有文献中的相关结论.

关键词: 广义 Logistic 型泛函微分方程; 全局吸引性; 振动; 非振动

中图分类号: O 175.12; O 175.15

文献标识码: A

1 基本定理和引理

令 $g: [0, +\infty)$ 是一个非减的连续函数, 且满足 $g(t) < t, t \geq 0$, 以及 $g(t) \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$. 对于任意 $t \geq 0$, 用 C_t 表示连续函数 $\varphi: [g(t), t] \rightarrow [-1, +\infty)$ 的全体构成的赋范空间, 其范数定义为

$$\|\varphi\|_t = \sup_{s \in [g(t), t]} |\varphi(s)|.$$

文[1]研究一维 Logistic 型泛函微分方程

$$x'(t) + [1 + x(t)]F(t, x[\cdot]) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

零解的全局吸引性. 式(1)中, $F(t, \varphi)$ 是 $[0, +\infty) \times C_t$ 上的连续泛函, F 只依赖于 t 和 φ 在 $[g(t), t]$ 上的数值, $F(t, 0) = 0, t \geq 0$, 且满足 Yorke 条件为

$$-r(t)M_t(-\varphi) \leq F(t, \varphi) \leq r(t)M_t(\varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in C_t. \quad (2)$$

其中, $M_t(\varphi) = \max\{0, \sup_{s \in [g(t), t]} \varphi(s)\}$, $r(t) \in C([0, +\infty), (0, +\infty))$. 令 $\tau = -g(0)$, 则式(1)相应的初始条件为

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (3)$$

式(3)中, $\varphi \in C([-\tau, 0], [-1, +\infty))$, $\varphi(0) > -1$. 文[1]得出如下的定理.

定理 A 假设式(2)成立, 且对于每个 $\epsilon > 0$, 存在 $\eta = \eta(\epsilon) > 0$, 使得如果 $\inf_{s \in [g(t), t]} \varphi(s) \geq \epsilon$, 就有

$$F(t, \varphi) \geq \eta r(t), \quad F(t, -\varphi) \leq -\eta r(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

如果还满足

$$\int_0^{+\infty} r(s) ds = +\infty, \quad \int_{g(t)}^t r(s) ds \leq 3/2, \quad (5)$$

对于充分大的 t , 式(1), (3)的每个解趋于零.

容易看到, 对于广义时滞 Logistic 方程

$$x'(t) + r(t)[1 + x(t)][x(g(t))]^a = 0, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$F(t, \varphi) = r(t)[\varphi(\cdot)]^a$ 并不满足条件(2). 其中, $a \geq 1$ 为两正奇数之比, $r(t), g(t)$ 同前. 因此, 方程(6)零解的全局吸引性问题应另行研究. 文[2-3]研究了式(6)在初始条件式(3)下的零解的全局吸引性问题. 文[4]研究了包括式(1), (6)在内的更一般性的泛函微分方程, 即

$$x'(t) + r(t)[1 + x(t)]F(t, [x(\cdot)]^a) = 0, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

收稿日期: 2009-05-03

作者简介: 汪东树(1981-), 男, 讲师, 主要从事常微分及泛函微分方程的研究. E-mail: wangds@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026); 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

其中, α 同式(6), $F(t, \varphi)$ 同式(1). 文[4]得出如下的定理.

定理 B 假设式(2), (4), (5)成立, 且

$$\int_{g(t)}^t r(s) ds \leq \delta_0 = 1.46\cdots, \quad (8)$$

对于充分大的 t , 式(3), (7)的每个解趋于零. 其中, δ_0 是超越方程 $x + e^{-x} = 1 + \ln 2$ 的根.

引理 1^[1,4] 假设式(2)成立, 则初值问题(3), (7)的解 $x(t, 0, \varphi)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在, 且满足 $x(t, 0, \varphi) > -1, t \geq 0$.

引理 2 若式(2)成立, 且对任一满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) > 0$ 的连续函数 $x: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, 有

$$\int_0^{+\infty} F(s, [x(s)]^\alpha) ds = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} F(s, [-x(s)]^\alpha) ds = -\infty, \quad (9)$$

则式(3), (7)的每个非振动解趋于零.

2 主要结果和证明

定理 1 在引理 2 成立的条件下, 若式(5)成立, 并满足条件

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \int_{g(t)}^t r(s) ds \leq 3/2, \quad (10)$$

且不等式组

$$\left. \begin{aligned} \ln(1+x) &\leq y - 1/6y^2, \\ -\ln(1-y) &\leq \begin{cases} x + 1/6x^2, & 0 \leq x < 1, \\ x^\alpha + 1/6x^{2\alpha}, & x \geq 1, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在区域 $D = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y < 1\}$ 内只有唯一解 $(x, y) = (0, 0)$, 则式(3), (7)的每个解趋于零.

证明 设 $x(t) = x(t, 0, \varphi)$ 是式(3), (7)的解. 由引理 1 可知, $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在且满足对一切 $t \geq 0$, 有 $x(t) > -1$. 由引理 2 可知, 若 $x(t)$ 为非振动解时, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad (12)$$

成立. 因此, 只需讨论 $x(t)$ 为振动解的情形.

首先证明, 若 $x(t)$ 为振动解, 则 $x(t)$ 有界.

令 $t_1 > 0$, 使得当 $t \geq t_1$ 时, 有 $g(t) \geq 0$. 令 $t^* (t^* > t_1, t^*$ 充分大) 是 $x(t)$ 的任一个局部左极大值点, 且 $x(t^*) > 0$. 显然, 有 $x'(t^*) = 0$. 由式(8)可知, $F(t^*, [x(\cdot)]^\alpha) = 0$. 下面证明存在 $t_0 \in [g(t^*), t^*]$, 使得 $x(t_0) = 0$; 否则, 由前面假设可知, 当 $t \in [g(t^*), t^*]$ 时, 有 $x(t) > 0$. 由于 $x(t)$ 是振动解, 由闭区间上的连续函数介值性定理, 可知存在 $t^{**} < g(t^*) (g(t^{**}) > 0)$, 使得 $x(t^{**}) = x(g(t^*)) / 2$, 且当 $t \in [t^{**}, g(t^*)]$ 时, 有 $x(t) > 0$. 因此, 由式(2)可知, 当 $t \in [t^{**}, g(t^*)]$ 时, 有 $F(t, [x(\cdot)]^\alpha) \geq 0$.

方程(8)两端从 t^{**} 积分至 $g(t^*)$, 有

$$1 + x(g(t^*)) = [1 + x(t^{**})] \exp\left\{-\int_{t^{**}}^{g(t^*)} F(s, [x(\cdot)]^\alpha) ds\right\} \leq 1 + x(t^{**}). \quad (13)$$

这与假设 $x(t^{**}) = x(g(t^*)) / 2$ 相矛盾. 即存在 $t_0 \in [g(t^*), t^*]$, 使得

$$x(t_0) = 0. \quad (14)$$

方程(7)两端从 t_0 积分至 t^* , 可得

$$\ln[1 + x(t^*)] = -\int_{t_0}^{t^*} F(s, [x(\cdot)]^\alpha) ds \leq \int_{t_0}^{t^*} r(s) ds. \quad (15)$$

由条件式(10)可知, 存在 $M > 3/2$, 使得对 $\forall t$ 有

$$\int_{g(t)}^t r(s) ds \leq M. \quad (16)$$

于是, 由式(15), (16)可得

$$x(t^*) \leq e^M - 1. \quad (17)$$

其中, 可设 t^* 充分大. 由于 t^* 的任意性, 即证明了最终有 $x(t) \leq e^M - 1$.

令 $\bar{t} (\bar{t} > t_1)$ 是 $x(t)$ 的任一个局部左极小值点, 且 $x(\bar{t}) > 0$. 显然, 有 $x'(\bar{t}) = 0$. 类似于式(14)的证

明, 可知存在 $s_0 \in [g(t^*), t^*]$, 使得 $x(s_0) = 0$, 于是有

$$x(\bar{t}) \geq -1 + \exp[-M(e^M - 1)]. \quad (18)$$

其中, 可设 \bar{t} 充分大. 由于 \bar{t} 的任意性, 即证明了最终有 $x(t) \geq -1 + \exp[-M(e^M - 1)]$.

其次, 证明若 $x(t)$ 为振动解, 则式(11)成立.

令 $u = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} x(t)$, $v = -\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$, 由前面的结论可知, $0 \leq u \leq e^M$, $0 \leq v \leq 1 - \exp[-M(e^M - 1)]$. 对任意的 $0 < \epsilon < 1 - v$, 由式(10)可知存在 $t_2 = t_2(\epsilon) > 0$, 使得

$$\int_{g(t)}^t r(s) ds \leq 3/2 + \epsilon, \quad t \geq g(t_2), \quad (19)$$

$$-v_1 \equiv -v - \epsilon < x(t) < u + \epsilon \equiv u_1, \quad t \geq g(t_2). \quad (20)$$

然后, 由式(2), (7), (20), 并注意到 $v_1^a \leq v_1$, 可导出

$$\frac{x'(t)}{1+x(t)} \leq r(t)v_1^a \leq r(t)v_1, \quad t \geq t_2, \quad (21)$$

$$\frac{x'(t)}{1+x(t)} \geq -r(t)u_1^a, \quad t \geq t_2. \quad (22)$$

由于 $x(t)$ 是振动的, 不失一般性, 可以取 $\{\tau_n\}$ 是一个严格增加的序列, 满足 $g(\tau_n) > t_2$, $x(\tau_n) = 0$, 且有

$$\begin{cases} x(t) \geq 0, & t \in [\tau_{2n-1}, \tau_{2n}], \\ x(t) \leq 0, & t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+1}]. \end{cases}$$

若记 $p_n \in (\tau_{2n-1}, \tau_{2n})$, $q_n \in (\tau_{2n}, \tau_{2n+1})$, 使得

$$x(p_n) = \max\{x(t) : \tau_{2n-1} < t < \tau_{2n}\},$$

$$x(q_n) = \max\{x(t) : \tau_{2n} < t < \tau_{2n+1}\}.$$

对于 $n=1, 2, \dots$, 有 $x(p_n) > 0$, $x'(p_n) = 0$; $x(q_n) < 0$, $x'(q_n) = 0$.

类似式(14)的证明, 可知存在 $\xi_n \in [g(p_n), p_n]$, 使得 $x(\xi_n) = 0$ 且 $x(t) > 0$, $t \in (\xi_n, p_n]$. 对于 $t_0 \leq t \leq \xi_n$, 由式(21)可得

$$x(t) \geq -1 + \exp[-v_1 \int_t^{\xi_n} r(s) ds], \quad t_0 \leq t \leq \xi_n. \quad (23)$$

当 $\xi_n \leq t \leq p_n$ 时, 由式(2), (23)可得

$$\begin{aligned} -F(t, [x(\cdot)]^a) &\leq r(t) \max\{0, \sup_{s \in [g(t), t]} [-x(\cdot)]^a\} \leq \\ &r(t) \max\{0, \sup_{s \in [g(t), \xi_n]} [-x(\cdot)]^a\} \leq r(t) [1 - \exp\{-v_1 \int_{g(t)}^{\xi_n} r(s) ds\}]. \end{aligned}$$

因此, 有

$$\frac{x'(t)}{1+x(t)} \leq \min\left\{r(t)v_1, r(t)\left[1 - \exp\left\{-v_1 \int_{g(t)}^{\xi_n} r(s) ds\right\}\right]\right\}, \quad \xi_n \leq t \leq p_n. \quad (24)$$

以下分两种情况进行讨论.

(1) $\frac{\ln(1-v_1)}{v_1} \leq \frac{3}{2} + \epsilon$. 再考虑两种可能的子情况:

(a) $\int_{\xi_n}^{p_n} r(s) ds \leq -\frac{\ln(1-v_1)}{v_1} \leq \frac{3}{2} + \epsilon$. 此时, 由式(19), (24)可得

$$\begin{aligned} \ln[1+x(p_n)] &\leq \int_{\xi_n}^{p_n} r(t) [1 - \exp\{-v_1 \int_{g(t)}^{\xi_n} r(s) ds\}] dt \leq \\ &\int_{\xi_n}^{p_n} r(t) [1 - \exp\{-v_1 [\frac{3}{2} + \epsilon - \int_{\xi_n}^t r(s) ds]\}] dt \leq \\ &\int_{\xi_n}^{p_n} r(s) ds - \frac{1}{v_1} [\exp\{-\frac{3+2\epsilon}{2}v_1 + v_1 \int_{\xi_n}^{p_n} r(s) ds\} - \exp\{-\frac{3+2\epsilon}{2}v_1\}]. \end{aligned} \quad (25)$$

因为 $f_1(x) = x - \frac{1}{v_1} [\exp\{-\frac{3+2\epsilon}{2}v_1 + v_1\} - \exp\{-\frac{3+2\epsilon}{2}v_1\}]$ 在 $0 \leq x \leq \frac{3}{2} + \epsilon$ 上严格递增, 所以由式(25)可得

$$\begin{aligned} \ln[1+x(p_n)] &\leq -\frac{\ln(1-v_1)}{v_1} - \exp\{-v_1[\frac{3+2\epsilon}{2} + \frac{\ln(1-v_1)}{v_1}]\} \leq \\ &-\frac{(1-v_1)\ln(1-v_1)}{v_1} - 1 + \frac{3+2\epsilon}{2}v_1 \leq (1+\epsilon)v_1 - \frac{1}{6}v_1^2. \end{aligned} \quad (26)$$

上述不等式的推导中,应用了幂级数展开及不等式

$$(1-v_1)\ln(1-v_1) \geq -v_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{6}v_1^3.$$

$$(b) -\frac{\ln(1-v_1)}{v_1} < \int_{\xi_n}^{p_n} r(s)ds \leq \frac{3}{2} + \epsilon. \text{ 此时,必存在 } l_n \leq (\xi_n, p_n), \text{ 使得 } \int_{l_n}^{p_n} r(s)ds \equiv -\frac{\ln(1-v_1)}{v_1}.$$

于是,由式(19),(24)可得

$$\begin{aligned} \ln[1+x(p_n)] &\leq \int_{\xi_n}^{l_n} r(s)v_1 ds + \int_{l_n}^{p_n} r(t)[1 - \exp\{-v_1 \int_{g(t)}^{\xi_n} r(s)ds\}] \leq v_1 \int_{\xi_n}^{l_n} r(s)ds + \\ &\int_{l_n}^{p_n} r(s)ds - \frac{1}{v_1}[1 - \exp\{-v_1 \int_{l_n}^{p_n} r(s)ds\}]\exp\{-v_1[\frac{3+2\epsilon}{2} - \int_{\xi_n}^{p_n} r(s)ds]\} = \\ &v_1 \int_{\xi_n}^{l_n} r(s)ds + \int_{l_n}^{p_n} r(s)ds - \exp\{-v_1[\frac{3+2\epsilon}{2} - \int_{\xi_n}^{p_n} r(s)ds]\} \leq \\ &\frac{(1-v_1)\ln(1-v_1)}{v_1} - 1 + \frac{3+2\epsilon}{2}v_1 \leq (1+\epsilon)v_1 - \frac{1}{6}v_1^2. \end{aligned} \quad (27)$$

综合子情况(a),(b),已经证明了

$$\ln[1+x(p_n)] \leq (1+\epsilon)v_1 - \frac{1}{6}v_1^2, \quad n=1,2,\dots. \quad (28)$$

在式(28)中,令 $n \rightarrow +\infty, \epsilon \rightarrow 0^+$,可得

$$\ln[1+u] \leq v - \frac{1}{6}v. \quad (29)$$

$$(2) -\frac{\ln(1-v_1)}{v_1} > \frac{3}{2} + \epsilon. \text{ 由式(19),(24)可得}$$

$$\begin{aligned} \ln[1+x(p_n)] &\leq \frac{3+2\epsilon}{2} - \frac{1}{v_1}(1 - \exp\{-\frac{3+2\epsilon}{2}v_1\}) \leq \\ &\frac{(3+2\epsilon)^2}{8}v_1 - \frac{(3+2\epsilon)^2}{48}v_1^2 + \frac{(3+2\epsilon)^2}{384}v_1^3. \end{aligned} \quad (30)$$

由于函数 $f_2(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{(3+2\epsilon)^2}{8}x + \frac{(3+2\epsilon)^2}{48}x^2 - \frac{(3+2\epsilon)^2}{384}x^3$ 是 $[0,1]$ 上严格增加的函数,且 $f_2(0)=0$, 故有

$$\ln[1+x(p_n)] \leq v_1 - \frac{1}{6}v_1^2, \quad n=1,2,\dots. \quad (31)$$

在式(31)中,令 $n \rightarrow +\infty, \epsilon \rightarrow 0^+$,可得

$$\ln[1+u] \leq v - \frac{1}{6}v^2. \quad (32)$$

综合情况(1),(2),可得

$$\ln[1+u] \leq v - \frac{1}{6}v^2. \quad (33)$$

下面证明

$$-\ln(1-v) \leq \begin{cases} u^a + \frac{1}{6}u^{2a}, & u \geq 1, \\ u + \frac{1}{6}u^2, & 0 \leq u < 1. \end{cases} \quad (34)$$

类似式(14)的证明,可知存在 $\eta_n \in [g(q_n), q_n)$, 使得 $x(\eta_n)=0$ 且 $x(t) < 0, t \in (\eta_n, q_n]$. 对于 $t_0 \leq t \leq \eta_n$, 由式(22)可得

$$x(t) \leq -1 + \exp[u_1^a \int_t^{\eta_n} r(s)ds], \quad t_0 \leq t \leq \eta_n. \quad (35)$$

当 $\eta_n \leq t \leq q_n$ 时, 由式(2), (35)可得

$$\begin{aligned} -F(t, [x(\cdot)]^a) &\geq -r(t) \max\{0, \sup_{s \in [g(t), t]} [-x(\cdot)]^a\} \geq \\ &-r(t) \max\{0, \sup_{s \in [g(t), \eta_n]} [-x(\cdot)]^a\} \geq -r(t) u_1^{a-1} [\exp\{u_1^a \int_{g(t)}^{\eta_n} r(s) ds\} - 1]. \end{aligned}$$

因此, 有

$$-\frac{x'(t)}{1+x(t)} \leq \min\{r(t) u_1^a, r(t) u_1^{a-1} [\exp\{u_1^a \int_{g(t)}^{\eta_n} r(s) ds\} - 1]\}, \quad \eta_n \leq t \leq p_n. \quad (36)$$

当 $u_1 \geq 1$ 时, 分 3 种情况讨论.

(1) $\int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds \leq 1$. 由式(36)可得

$$-\ln[1+x(q_n)] \leq u_1^a \int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds \leq u_1^a \leq u_1^a + \frac{1}{6} u_1^{2a}. \quad (37)$$

(2) $1 < \int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds \leq \frac{3+2\epsilon}{2} - \frac{\ln(1+u_1^a)}{u_1^a}$. 由于函数 $f_3(x) = \frac{3+2\epsilon}{2}x - \ln(1+x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格增加且 $f_3(0) = 0$, 故由式(36)可得

$$-\ln[1+x(q_n)] \leq u_1^a \int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds \leq \frac{3+2\epsilon}{2} u_1^a - \ln(1+u_1^a) \leq (1+\epsilon) u_1^a + \frac{1}{6} u_1^{2a}. \quad (38)$$

(3) $\frac{3+2\epsilon}{2} - \frac{\ln(1+u_1^a)}{u_1^a} < \int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds \leq \frac{3+2\epsilon}{2}$. 此时存在 $h_n \in (\eta_n, q_n)$, 使得 $\int_{\eta_n}^{h_n} r(s) ds = \frac{3+2\epsilon}{2} - \frac{\ln(1+u_1^a)}{u_1^a}$. 又由于函数 $f_4(x) = (1+x)\ln(1+x) - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ 在 $[0, +\infty)$ 内严格增加且 $f_4(0) = 0$, 故由式(38)可得

$$\begin{aligned} -\ln[1+x(q_n)] &\leq u_1^a \int_{\eta_n}^{h_n} r(s) ds + \int_{h_n}^{q_n} r(t) u_1^{a-1} [\exp\{u_1^a \int_{g(t)}^{\eta_n} r(s) ds\} - 1] dt = \\ &u_1^a \int_{\eta_n}^{h_n} r(s) ds - \int_{h_n}^{q_n} r(t) u_1^{a-1} + \int_{h_n}^{q_n} r(t) u_1^{a-1} \exp\{u_1^a \int_{g(t)}^{\eta_n} r(s) ds\} dt = \\ &u_1^a \int_{\eta_n}^{h_n} r(s) ds - \int_{h_n}^{q_n} r(t) u_1^{a-1} dt + \int_{h_n}^{q_n} r(t) u_1^{a-1} [\exp\{\frac{3+2\epsilon}{2} u_1^a - u_1^a \int_{\eta_n}^t r(s) ds\} - 1] dt \leq \\ &u_1^a \int_{\eta_n}^{h_n} r(s) ds - \int_{h_n}^{q_n} r(t) u_1^{a-1} dt + \frac{1}{u_1} \exp\{\frac{3+2\epsilon}{2} u_1^a\} [\exp\{-u_1^a \int_{\eta_n}^{h_n} r(s) ds\} - \exp\{-u_1^a \int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds\}] = \\ &u_1^a \int_{\eta_n}^{h_n} r(s) ds - \int_{h_n}^{q_n} r(t) u_1^{a-1} dt + \frac{1}{u_1} \{1 + u_1^a - \exp\{u_1^a [\frac{3+2\epsilon}{2} - \int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds]\}\} \leq u_1^a \int_{\eta_n}^{h_n} r(s) ds - \\ &\int_{h_n}^{q_n} r(t) u_1^{a-1} dt + u_1^{a-1} \leq u_1^{a-1} \{ (1+u_1) \int_{\eta_n}^{h_n} r(s) ds + 1 - \frac{3+2\epsilon}{2} \} = \frac{(1+u_1)\ln(1+u_1^a)}{u_1} + \\ &1 + \frac{3+2\epsilon}{2} u_1^a \leq -\frac{(1+u_1^a)\ln(1+u_1^a)}{u_1^a} + 1 + \frac{3+2\epsilon}{2} u_1^a \leq (1+\epsilon) u_1^a + \frac{1}{6} u_1^{2a}. \end{aligned} \quad (39)$$

综合以上 3 种情况, 可以证明, 当 $u_1 \geq 1$ 时, 有

$$-\ln[1+x(q_n)] \leq (1+\epsilon) u_1^a + \frac{1}{6} u_1^{2a}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (40)$$

当 $0 \leq u_1 < 1$ 时, 则有 $u_1^a \leq u_1$, 因而式(36)可写为

$$-\frac{x'(t)}{1+x(t)} \leq \min\{r(t) u_1, r(t) [\exp\{u_1 \int_{g(t)}^{\eta_n} r(s) ds\} - 1]\}, \quad \eta_n \leq t \leq p_n. \quad (43)$$

下面分两种情况进行讨论.

(1) $\int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds \leq \frac{3+2\epsilon}{2} - \frac{\ln(1+u_1)}{u_1}$. 由于函数 $f_5(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2$ 在 $[0, 1]$ 内严格增加且 $f_5(0) = 0$, 故由式(41)可得

$$-\ln[1+x(q_n)] \leq u_1 \int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds \leq \frac{3+2\epsilon}{2} u_1 - \ln(1+u_1) \leq (1+\epsilon) u_1 + \frac{1}{6} u_1^2. \quad (42)$$

(2) $\frac{3+2\epsilon}{2} - \frac{\ln(1+u_1)}{u_1} < \int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds \leq \frac{3+2\epsilon}{2}$. 此时必存在 $s_n \in (\eta_n, q_n)$, 满足 $\int_{\eta_n}^{s_n} r(s) ds = \frac{3+2\epsilon}{2} - \frac{\ln(1+u_1)}{u_1}$.

$\frac{\ln(1+u_1)}{u_1}$. 由式(41)可得

$$\begin{aligned} -\ln[1+x(q_n)] &\leq u_1 \int_{\eta_n}^{h_n} r(s) ds + \int_{h_n}^{q_n} r(t) [\exp\{u_1 \int_{g(t)}^{\eta_n} r(s) ds\} - 1] dt \leq \\ &u_1 \int_{\eta_n}^{s_n} r(s) ds - \int_{s_n}^{q_n} r(s) ds + \frac{1}{u_1} \exp\left\{\frac{3+2\varepsilon}{2} u_1\right\} [\exp\{-\int_{\eta_n}^{s_n} r(s) ds\} - \exp\{-\int_{\eta_n}^{q_n} r(s) ds\}] = \\ &u_1 \int_{\eta_n}^{s_n} r(s) ds - \int_{s_n}^{q_n} r(s) ds + \frac{1}{u_1} [1+u_1 - \exp\{u_1 [\frac{3+2\varepsilon}{2} - \int_{s_n}^{q_n} r(s) ds\}]] \leq \\ &-\frac{(1+u_1)\ln(1+u_1)}{u_1} + \frac{3+2\varepsilon}{2} u_1 + 1 \leq (1+\varepsilon)u_1 + \frac{1}{6} u_1^2. \end{aligned} \quad (43)$$

综合以上 2 种情况,可以证明,当 $0 \leq u_1 < 1$ 时,有

$$-\ln[1+x(q_n)] \leq (1+\varepsilon)u_1 + \frac{1}{6} u_1^2, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (44)$$

在式(40),(44)中,令 $n \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0^+$,即可得式(34). 于是,由式(11),(35),(36)可知, $u=v=0$. 这就证明了当 $x(t)$ 是振动时,结论成立. 证毕.

$$\text{由于} \begin{cases} \ln(1+x) \leq y - \frac{1}{6} y^2, \\ -\ln(1-y) \leq x + \frac{1}{6} x^2, \end{cases} \quad \text{在区域 } D = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y < 1\} \text{ 内只有唯一解 } (x, y) = (0, 0),$$

于是,可得到如下的结论.

推论 1 当 $\alpha=1$ 时,在定理 1 成立的条件下,且式(5),(10)成立,则式(1),(3)的每个解趋于零.

推论 1 比定理 A 的结果要好,包含了目前关于 $\alpha=1$ 的很多结果^[5].

参考文献:

- [1] 庾建设. 一类泛函微分方程零解的全局吸引性及应用[J]. 中国科学: A 辑, 1996, 26(1): 23-33.
- [2] CHEN M, YU J, ZENG D, et al. Global attractivity in a generalized nonautonomous delay Logistic equation[J]. Bulletin of Institute of Mathematics Academia Sinica, 1994, 22(2): 91-99.
- [3] LI Jing-wen. Global attractivity in a generalized delay Logistic equation[J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities (B), 1996, 11(2): 165-174.
- [4] 王晓萍, 廖六生. 广义 Logistic 型泛函微分方程零解的全局吸引性[J]. 应用数学学报, 2004, 27(1): 172-179.
- [5] 唐先华, 庾建设. Logistic 型脉冲泛函微分方程零解的全局吸引性[J]. 数学学报, 2002, 25(5): 941-952.

Global Attractivity of the Zero Solution of the Super Logistic Functional Differential Equations

WANG Dong-shu, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, the super Logistic type functional differential equations is investigated $x'(t) + [1+x(t)]F(t, x[\cdot]^a) = 0, t \geq 0, a \geq 1$. By using some analysis methods and techniques, some sufficient conditions are obtained for global attractivity of the zero solution by means of estimating zero solution of the equation. The reference is generalized.

Keywords: super Logistic type functional differential equations; global attractivity; nonoscillation; oscillation

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)