

文章编号: 1000-5013(2011)01-0100-03

# 非线性“Good” Boussinesq 方程的显式多辛格式

黄浪扬

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 对非线性“Good” Boussinesq 方程的一个多辛方程组进行数值离散, 导出方程的离散多辛守恒律, 得到一个与此数值离散方法等价的, 新的 7 点显式多辛格式. 通过孤立波的数值模拟试验表明, 所构造格式既能很好地模拟单孤立波运动的波形, 又能很好地模拟双孤立波的碰撞过程, 可有效地模拟原孤立波的时间演化, 具有长时间的数值稳定性.

**关键词:** 非线性“Good” Boussinesq 方程; 多辛方程组; 显式多辛格式; 多辛守恒律; 孤立波试验

**中图分类号:** O 241.82

**文献标识码:** A

近年来, 多辛数值方法的研究<sup>[1-3]</sup>受到了广泛的重视, 它涉及了流体力学、量子力学、结构力学等许多研究领域. 文[4]构造了非线性“Good” Boussinesq 方程的一个隐式的 15 点多辛 Preissmann 格式. 本文进一步提出此方程的一个新的 7 点显式多辛格式.

## 1 多辛方程组形式

考虑满足周期边界条件的非线性“Good” Boussinesq 方程

$$u_{tt} = -u_{xxxx} + u_{xx} + (G'(u))_{xx}. \quad (1)$$

式(1)中,  $G(u): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是某个非线性光滑函数. 根据文[1]引入的多辛积分的概念, 引入正则动量  $v = u_x$ ,  $u_t = p_x$ ,  $w_x = p$ , 则式(1)可改写成多辛方程组的形式, 有

$$\left. \begin{aligned} M \partial_t \mathbf{z} + K \partial_x \mathbf{z} &= \nabla_z S(\mathbf{z}), \\ \mathbf{z} &\in \mathbf{R}^4, \\ (x, t) &\in \mathbf{R}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上式中,  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}$ ; Hamilton 函数  $S(\mathbf{z}) = 1/2(u^2 - v^2 -$

$p^2) + G(u)$ ;  $\nabla_z$  表示光滑函数  $S: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$  的梯度算子. 由此可得, 方程组(2)的变分方程组为

$$M d\mathbf{z}_t + K d\mathbf{z}_x = D_{\mathbf{z}} S(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad (3)$$

对变分方程组(3)两边与  $d\mathbf{z}$  作外积运算, 可得重要的多辛守恒律为

$$\frac{\partial}{\partial t} (du \Delta dw) + \frac{\partial}{\partial x} (du \Delta dv + dw \Delta dp) = 0. \quad (4)$$

式(4)中,  $\Delta$  为外积算子. 求解多辛方程组(2)的数值方法, 可表示为

$$M \partial_t^{i,j} \mathbf{z}_{i,j} + K \partial_x^{i,j} \mathbf{z}_{i,j} = \nabla_z S(\mathbf{z}_{i,j}). \quad (5)$$

式(5)中,  $\mathbf{z}_{i,j} = \mathbf{z}(x_i, t_j) = \mathbf{z}(i \cdot h, j \cdot \tau)$ ,  $h$  和  $\tau$  分别是空间步长和时间步长,  $\partial_t^{i,j}$ ,  $\partial_x^{i,j}$  分别为算子  $\partial_t$ ,  $\partial_x$  的离散. Bridges 等<sup>[1]</sup>称能保持多辛守恒律(5)的离散形式的格式为多辛格式.

收稿日期: 2009-04-11

通信作者: 黄浪扬 (1974-), 男, 副教授, 主要从事偏微分方程数值解法的研究. E-mail: hly6@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10901074); 福建省自然科学基金资助项目(Z0511029)

## 2 显式多辛格式

首先考察一些差分算子的性质<sup>[3]</sup>. 定义向前差分算子  $D_t f^j = (f^{j+1} - f^j)/\tau$ ,  $D_x f_i = (f_{i+1} - f_i)/h$ , 易得推广的 Leibniz 法则, 有

$$D_x(f \cdot g)_i = (\alpha f_{i+1} + (1 - \alpha)f_i) \cdot D_x g_i + D_x f_i \cdot ((1 - \alpha)g_{i+1} + \alpha g_i), \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (6)$$

特别地, 当  $\alpha=1$  时, 有

$$D_x(f \cdot g)_i = f_{i+1} \cdot D_x g_i + D_x f_i \cdot g_i. \quad (7)$$

以上性质对  $t$  方向也成立, 只要算符运算是双线性的, 离散的 Leibniz 法则就成立. 例如外积运算, 此时  $f, g$  是一形式.

对多辛方程组(2)的分量形式进行离散, 可得到其离散格式, 有

$$\left. \begin{aligned} D_t w_i^j + D_x v_i^j &= u_i^j + G'(u_i^j), \\ -D_x u_{i-1}^j &= -v_i^j, \\ D_t u_i^{j-1} - D_x p_i^j &= 0, \\ -D_x w_{i-1}^j &= -p_i^j. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

**定理 1** 格式(8)是多辛格式, 它满足离散多辛守恒律

$$D_t(du_i^{j-1} \wedge dw_i^j) + D_x(du_{i-1}^j \wedge dv_i^j + dw_{i-1}^j \wedge dp_i^j) = 0. \quad (9)$$

**证明** 式(8)对应的变分方程组为

$$\left. \begin{aligned} D_t dw_i^j + D_x dv_i^j &= du_i^j + G''(u_i^j) du_i^j, \\ -D_x du_{i-1}^j &= -dv_i^j, \\ D_t du_i^{j-1} - D_x dp_i^j &= 0, \\ -D_x dw_{i-1}^j &= -dp_i^j. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

用  $du_i^j$  外积式(10)的第 1 个方程, 可得

$$D_t dw_i^j \wedge du_i^j + D_x dv_i^j \wedge du_i^j = 0. \quad (11)$$

由离散的 Leibniz 法则(7), 可得

$$D_t(du_i^{j-1} \wedge dw_i^j) = D_t du_i^{j-1} \wedge dw_i^j + du_i^j \wedge D_t dw_i^j. \quad (12)$$

由离散的 Leibniz 法则(7), 及式(10)的第 2 个方程, 可得

$$D_x(du_{i-1}^j \wedge dv_i^j) = D_x du_{i-1}^j \wedge dv_i^j + du_i^j \wedge D_x dv_i^j = du_i^j \wedge D_x dv_i^j. \quad (13)$$

同理可得

$$D_x(dw_{i-1}^j \wedge dp_i^j) = D_x dw_{i-1}^j \wedge dp_i^j + dw_i^j \wedge D_x dp_i^j = dw_i^j \wedge D_x dp_i^j. \quad (14)$$

所以, 由式(11)~(14)可得离散的多辛守恒律(9), 从而离散格式(8)为多辛格式.

在计算时, 消去中间变量  $v, w$  和  $p$ , 格式(8)等价于三层 7 点显式多辛格式

$$D_t^2 u_{i+1}^{j-1} + D_x^4 u_{i-1}^j = D_x^2 [u_i^j + G'(u_i^j)], \quad \begin{bmatrix} & * & & & \\ * & * & * & * & * \\ & * & & & \end{bmatrix}. \quad (15)$$

## 3 数值例子

取  $G(u) = u^3/3$ , 则非线性“Good” Boussinesq 方程(1)的精确孤立波解为

$$u(x, t) = -A \operatorname{sech}^2[(P/2)(\xi - \xi_0)], \quad \xi = x - ct. \quad (16)$$

对于非线性“Good” Boussinesq 方程的显式多辛格式, 采取在有限区域  $I = (X_L, X_R)$  上设置人工边界和周期边界条件的方法进行数值模拟. 即对人工边界  $X_L$  和  $X_R$  取得足够远, 以满足周期边界条件. 由于格式(15)是三层格式, 所以为简便起见, 格式初始时的第 1 层和第 2 层的值均取精确值.

### 3.1 单孤立波的模拟

在孤立波解式(16)中, 取振幅  $A$  为 0.5, 初相  $\xi_0$  为 0, 且  $X_L = -50, X_R = 50$ , 时间步长  $\tau$  为 0.01, 空间步长  $h$  为 0.5. 显式多辛格式(15)在  $t \in [0, 100]$  时, 单孤立波传播的模拟结果如图 1 所示.

3.2 同向双孤立波的模拟

在孤立波解式(16)中,取两个不同振幅、不同初相的孤立波分别进行数值模拟试验.当振幅  $A$  分别为 1,0.25,相应的初相  $\xi_0$  分别为  $-60,-80$ ,此时  $X_L=-100,X_R=100$ ,时间步长  $\tau$  为 0.01,空间步长  $h$  为 0.5.显式多辛格式(15)模拟双孤立波同向传播时,其碰撞分离的模拟结果如图 2 所示.

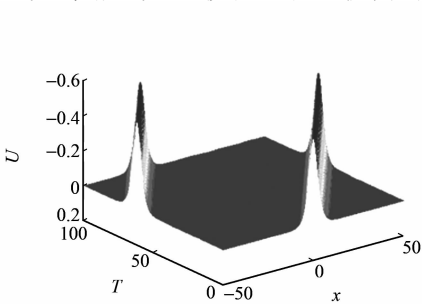


图 1 单孤立波的传播  
Fig. 1 Propagation of soliton

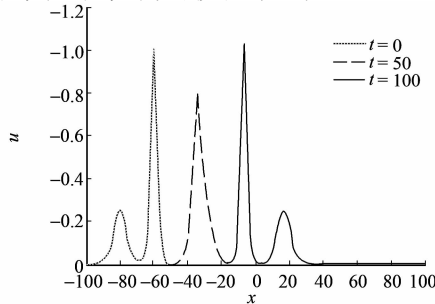


图 2 双孤立波的碰撞过程  
Fig. 2 Collision process of two solitons

4 结论

由图 1(数值模拟试验均计算 10 000 步,下同)可知,显式多辛格式(15)能很好地模拟单孤立波运动的波形,不出现振荡现象.由图 2 可知,显式多辛格式(15)同样能够很好地模拟双孤立波的碰撞过程,碰撞后,两个孤立子保持原来的形状及速度传播,好象碰撞没有发生过似的.

由此可见,所构造的显式多辛格式能够成功、有效地模拟原孤立波的时间演化,具有长时间的数值稳定性.由于多辛格式(15)是显式的,因此计算量比隐式的 15 点多辛 Preissmann 格式大大减小,数值模拟结果与理论相符.

参考文献:

[1] BRIDGES T J, REICH S. Multi-symplectic integrators: Numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity[J]. Physics Letter (A), 2001, 284(4-5): 184-193.  
[2] 黄浪扬. 广义 Pochhammer-Chree 方程的多辛 Fourier 拟谱格式及孤立波试验[J]. 华侨大学学报:自然科学版, 2008, 29(3): 468-471.  
[3] 王雨顺, 王斌, 秦孟兆. 偏微分方程的局部保结构算法[J]. 中国科学: A 辑, 2008, 38(4): 377-397.  
[4] 曾文平, 黄浪扬, 秦孟兆. “Good” Boussinesq 方程的多辛算法[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(7): 743-748.

Explicit Multi-Symplectic Scheme for Nonlinear  
“Good” Boussinesq Equation

HUANG Lang-yang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** By discretizing the multi-symplectic systems of the nonlinear “Good” Boussinesq equation, we have derived the discretized multi-symplectic conservation laws. A new seven-point explicit multi-symplectic scheme which is equivalent to the discretized method is obtained. It is shown that the scheme constructed in this paper has excellent long-time numerical behavior by numerical experiments.  
**Keywords:** nonlinear “Good” Boussinesq equation; multi-symplectic systems; explicit multi-symplectic scheme; multi-symplectic conservation laws; solitary wave experiments