

文章编号: 1000-5013(2010)06 0711-04

正则图的均匀边染色

于罡, 宋海洲

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究正则图的均匀边染色, 指出并非所有正则图都存在任意种颜色的均匀边染色. 证明当 l 能够分解为整数 k 与偶数 b 的乘积时, l -正则图存在均匀 k -边染色. 同时, 给出正则图均匀边染色的最小颜色数.

关键词: 正则图; 边染色; 均匀边; 几乎均匀边

中图分类号: O 157.5

文献标识码: A

图的染色问题是图论研究的经典领域. 这是由于它在组合分析和实际生活中的广泛需要, 如时间表问题、贮藏问题、电信通讯站点的频率分配问题、计算机网络结构设计区分问题, 以及计算机和银行安全密码问题等. 其中的一些网络及优化问题, 可以进一步转化为均匀点染色、均匀边染色、均匀全染色等问题. 图的染色的基本问题就是确定各种染色法的色数, 而确定图的有关色数是一个十分困难的问题. 文[1] 证明对于任意 $v \in V(G)$, 若 k 不能整除 $d(v)$, 则图 G 存在均匀 k -边染色. 文[2] 证明了所有的二分图都是可均匀染色的. 文[3] 证明了任意一个不为奇圈的连通外平面图都是均匀可染的. 文[4] 给出了 Halin 图的一些均匀边染色结果. 文[5] 研究了混合超图的星染色的若干性质. 本文讨论正则图的均匀边染色, 考虑的图都是有限无向简单图.

1 定义及引理

图 G 的点集和边集分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示. 对任意的 $v \in V(G)$, 令 $d_G(v)$ 表示 v 的度, 在不致引起混淆的情况下, 简记为 $d(v)$. 如果对每个 $v \in V(G)$, 均有 $d_G(v) = l$, 无向图 G 称为 l -正则的. 图 G 的边染色是给图 G 的每条边分配一种颜色, 用正整数 $1, 2, \dots$ 表示颜色, 若 C 是边集 E 到集合 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的映射, 即 $C: E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, 则称 C 为图 G 的 k -边染色^[6]. 令 $i_C(v)$ 表示在染色 C 中与 G 的顶点 v 关联的 i 色边的数目. 在不致引起混淆的情况下, 简记 $i(v) = i_C(v)$.

定义 1 假设 C 为图 G 的 k -边染色, 对于任意的 $v \in V(G)$ 和任意的 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 如果 $|i(v) - j(v)| \leq 1$, 则称 C 为图 G 的均匀边染色. 如果 $|i(v) - j(v)| \leq 2$, 则称 C 为图 G 的几乎均匀边染色.

令 $E(i)$ 表示图 G 的边染色 C 中 i 色边组成的集合, $E(i) \cup E(j)$ 的边导出子图记为 $G(i, j)$. 对任意的 $v \in V(G)$, 令 $G(v, i, j)$ 表示 $G(i, j)$ 中含顶点 v 的连通分支.

下面给出 4 个重要引理.

引理 1^[7] 对任何无向图 G , 均有 $|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_G(v)$.

引理 2^[1] 设图 G 为简单图, $k \geq 2$. 如果对任意 $v \in V(G)$, 有 $d(v) \not\equiv 0 \pmod k$, 则图 G 存在 k 种颜色的均匀边染色.

引理 3^[8] 设图 G 为连通图, 则图 G 一定存在 2-边染色 C , 其满足以下 3 个条件: (1) 若图 G 为欧拉图且 $|E|$ 为奇数, 则对 V 中任意选取的顶点 u , 有 $|1(u) - 2(u)| = 2$. 对于所有的 $v \in V(G) \setminus \{u\}$, 均有 $1(v) - 2(v) = 0$. (2) 若图 G 为欧拉图且 $|E|$ 为偶数, 则对于所有的 $v \in V(G)$, 有 $1(v) - 2(v) = 0$.

收稿日期: 2008-12-12

通信作者: 宋海洲 (1971-), 男, 副教授, 主要从事运筹与控制的研究. E-mail: hzsong@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目 (Z0511028)

(3) 若图 G 不是欧拉图, 则对所有的 $v \in V(G)$, 有 $|1(v) - 2(v)| \leq 1$.

引理 4^[7] 设 k 为大于 1 的任意整数, 则存在图 G 的 k -边染色 C , 使得对任意 $v \in V(G)$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 有 $|i(v) - j(v)| \leq 2$.

设 $k \geq 1$, C 为图 G 的几乎均匀 k -边染色. 对任意的 $v \in V(G)$, 令

$$\sigma(v) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq k \\ |i(v) - j(v)| \leq 2}} |i(v) - j(v)|,$$

$$\sigma(C) = \sum_{v \in V} \sigma(v).$$

显然, 对图 G 的均匀边染色有 $\sigma(C) = 0$.

若图 G 中的链 $K = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{r-1}, e_r, v_r)$ 满足如下的条件, 则称 K 为图 G 由 v_0 发出的一条 (α, β) -交换链.

(i) 对任意的 $1 \leq i \leq r$, 顶点 v_{i-1} 和 v_i 是边 e_i 的两个不同端点;

(ii) K 中所有的边互异, 且交替染以 α 色和 β 色;

(iii) e_1 染 α 色, 且 $\alpha(v_0) > \beta(v_0)$.

类似地, 令 γ 记边 e_r 的颜色, $\bar{\gamma}$ 记 (α, β) 中的另一种颜色, 则 $\gamma(v_r) > \bar{\gamma}(v_r)$.

若图 G 由 v_0 发出的一条 (α, β) -交换链以一条 β 色边到达 v_0 , 则再从一条与 v_0 关联的还没有在交换链上出现的 α 色边开始, 继续找下去. 这条 (α, β) -交换链的终点 v_r 可能与始点 v_0 相同.

令 K 为一条由顶点发出的 (α, β) -交换链, 若不存在另一条由顶点发出的 (α, β) -交换链 $K' \subset K$, 则称 K 为由顶点 x 发出的极小 (α, β) -交换链.

若 $\alpha(v_0) \geq \beta(v_0) + 2$, 则通过交换 K 上的两种颜色可能使染色更均匀; 然而, 若 $\alpha(v_0) = \beta(v_0) + 2$ 且 $v_0 = v_r$, 通过交换 K 上的两种颜色并不能改善其染色. 可以看出, 交换交换链上的两种颜色并不会使染色更坏.

2 主要结论

由引理 2 可知, 当 $l \not\equiv 0 \pmod{k}$ 时, l -正则图存在 k 种颜色的均匀边染色.

下面讨论一种 $l \equiv 0 \pmod{k}$ 的情形.

定理 1 设 $l = bk$, b 为不小于 2 的偶数, 则 l -正则图 G 存在 k 种颜色的均匀边染色.

证明 由引理 4 可知, 图 G 存在 k 种颜色的几乎均匀边染色. 在图 G 的所有 k 种颜色的几乎均匀边染色中, 令 C 为使 $\sigma(C)$ 达到最小的染色. 如果 $\sigma(C) = 0$, 则 C 为均匀 k -边染色.

下面用反证法, 假设 $\sigma(C) > 0$, 则存在 $x \in V(G)$ 和 $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使得 $\alpha(x) = \beta(x) + 2$.

考虑边导出子图 $G(x; \alpha, \beta)$. 如果 $H(x; \alpha, \beta)$ 是有奇数条边的欧拉图, 满足 $\alpha(x) = \beta(x) + 2$, 并且对每个 $v \in V(H) \setminus \{x\}$, 均有 $\alpha(v) = \beta(v)$ 成立, 则称 H 为图 G 在顶点 x 处的障碍子图.

如果对某个 $x \in V(G)$, $\alpha(x) = \beta(x) + 2$, 但 $H = G(x; \alpha, \beta)$ 不是障碍子图, 由引理 3, 可用颜色 α, β 对 H 的边重新染色, 从而得到图 G 的一个几乎均匀边染色 C' , 满足 $\sigma(C') < \sigma(C)$, 产生矛盾.

下设 $H = G(x; \alpha, \beta)$ 为一个障碍子图. 另设 y_0 为与 x 通过 α_0 色边关联的一点, 记边 $(x, y_0) = e_0$.

因为 C 为几乎均匀边染色, 易知对任意 $v \in V(G)$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, 必有 $i(v) \in \{b-1, b, b+1\}$. 若存在 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使得 $i(v) = b-1$, 则必存在 $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使得 $j(v) = b+1$ 成立, 反之亦然. 这样, 障碍子图 $H = G(x; \alpha, \beta)$ 中, 必有 $\alpha(x) = b+1$, $\beta(x) = b-1$.

情形 1 $\alpha_0(y_0) = \beta(y_0) = b+1$, 则存在 $\alpha_1 \in \{1, 2, \dots, k\}$ 使得 $\alpha_1(y_0) = b-1$.

首先将边 e_0 重新染以 β 色. 在图 G 的当前染色中, $\alpha_0(x) = \beta(x) = b$, 且 $\beta(y_0) = b+2$, $\alpha(y_0) = b$. 记由 y_0 发出的 (β, α_1) 极小交换链为 K . 如果 K 不终止于 y_0 , 则交换 K 中边的颜色后, $\beta(y_0) = b+1$, $\alpha(y_0) = \alpha(y_0) = b$; 如果 K 终止于 y_0 本身, 则交换 K 中边的颜色后, $\beta(y_0) = \alpha(y_0) = b$, $\alpha(y_0) = b+1$. 这样一来, 每种情况都得到了图 G 的仍为几乎均匀边染色的染色 C' , 且 $\sigma(C') < \sigma(C)$.

情形 2 $\alpha_0(y_0) = \beta(y_0) = b-1$. 存在 $\alpha_1 \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使得 $\alpha_1(y_0) = b+1$. 将边 e_0 重新染以 β 色. 在图 G 的当前染色中, $\alpha_0(x) = \beta(x) = b$, 且 $\beta(y_0) = b$, $\alpha(y_0) = b-2$. 记由 y_0 发出的 (α, α_1) 极小交换

链为 K . 如果 K 不终止于 y_0 , 交换 K 中边的颜色后, $\alpha_1(y_0) = b, \alpha_0(y_0) = b - 1, \beta(y_0) = b$, 图 G 得到改进, 产生矛盾. 如果 K 终止于 y_0 本身, 交换 K 中边的颜色后, $\alpha(y_0) = b - 1, \alpha_0(y_0) = b, \beta(y_0) = b$, 图 G 同样得到改进, 产生矛盾.

情形 3 $\alpha_0(y_0) = \beta(y_0) = b$, 顶点 x 通过 α_0 色边相关联的任意点, 均有 $\alpha(v) = \beta(v) = b$. 不然, 由情形 1, 2 可知, 对染色改进, 产生矛盾.

显然, 由 x 点发出的 (α_0, β) 极小交换链 K 必以一条 α_0 色边终止于 x 本身; 否则, 交换 K 中边的颜色, 在新染色中, $\alpha(x) = \beta(x) = b$, C 得到改进, 产生矛盾.

x 点通过 β 色边关联的任意点 v , 必有 $\alpha(v) = \beta(v) = b$. 不然, $\alpha(v) = \beta(v) = b + 1$ 或 $\alpha(v) = \beta(v) = b - 1$, 则可以交换 K 中边的颜色, 在新染色中 $\alpha(x) = b - 1 = \beta(x) - 2$ 此时, 障碍子图为 $G(x', \beta, \alpha)$.

由情形 1, 2 的讨论可知, 对图 G 的当前染色改进, 产生矛盾. 这样, 得出 $H = G(x', \alpha_0, \beta)$ 中与 x 关联的任意点, 均有 $\alpha(v) = \beta(v) = b$. 将 e_0 重新染以 β 色, 在图 G 的当前染色中, 有

$$\begin{aligned}\alpha_0(x) &= \beta(x) = b, \\ \beta(y_0) &= b + 1 = \alpha(y_0) + 2.\end{aligned}$$

对于 $G(y_0, \beta, \alpha)$ 中和 y_0 关联的点, 做与 $G(x', \alpha_0, \beta)$ 中和 x 关联的点相同的讨论, 同样可以得出 $G(y_0, \beta, \alpha)$ 中与 y_0 关联的任意点 v , 均有 $\alpha(v) = \beta(v) = b$; 否则, 可以改进当前染色, 产生矛盾. 继续这样做下去, 由图 H 的连通性, 可以得出任意顶点 $v \in V(H) \setminus \{x\}$, 均有 $\alpha_0(v) = \beta(v) = b$, 否则, 可以改进染色.

在此情形下, 图 H 中任意点的度均为 $2b$. 假设图 H 的阶为 q , 因为 b 是偶数, 则由引理 1 可知, $|E(H)| = 2b \cdot q/2 = b \cdot q$ 为偶数, 与障碍子图的定义矛盾. 证毕.

实际上, 当 $l = bk$, b 为奇数时, l -正则图未必是可以均匀 k -边染色的. 例如, $b = 1, k = 4$ 时的完全图 K_5 , 就不存在 4 种颜色的均匀边染色; 而 $b = 3, k = 2$ 的奇数阶 l -正则图, 也不存在 2 种颜色的均匀边染色.

由文[2]知, 当正则图可以 2 部划分时, 其存在任意种颜色的均匀边染色.

综上所述, 得到如下的推论.

推论 1 并非所有正则图都存在任意种颜色的均匀边染色.

由引理 2 可知, 任意简单图 G 都存在 $\Delta(G) + 1$ 种颜色的均匀边染色, 其中

$$\Delta(G) = \max\{d_G(x) : x \in V(G)\}.$$

对于给定的简单图 G , 定义

$$\chi''(G) = \min\{k : G \text{ 存在 } k(k > 1) \text{ 种颜色的均匀边染色}\},$$

显然, $\chi''(G)$ 是有意义的.

定理 2 设图 G 为连通的 m 阶 l -正则图, 则

- (i) $\chi''(G) = 3$, 当 $l = 2(2s + 1)$, 其中 s 为非负整数, 且 m 为奇数;
- (ii) $\chi''(G) = 2$, 其他情况.

证明 (1) 若 l 为奇数, 由引理 2 可知, $\chi''(G) = 2$;

(2) 若 $l \equiv 0 \pmod{4}$, 由引理 1 可知, $|E(G)| = ml/2$ 为偶数, 再由引理 3 可得, $\chi''(G) = 2$;

(3) 若 $l \not\equiv 0 \pmod{4}$, 但 $l \equiv 0 \pmod{2}$ 且 m 为偶数, 则 $|E(G)|$ 亦为偶数, 由引理 3 可知, $\chi''(G) = 2$.

至此, 证得定理 2 的 (ii) 情形.

下面讨论定理 2 的 (i) 情形. 此时, 图 G 为欧拉的且有奇数条边.

首先, 证明 $\chi''(G) \neq 2$. 在图 G 的任意 $2k$ -边染色 C 中, 由 $|E(G)|$ 为奇数, 可知 $E(1) \neq E(2)$, 所以至少存在一点, 不妨设为 v_0 , 使得 $1(v_0) \neq 2(v_0)$. 图 G 是欧拉图, 可知 $d(v_0)$ 是偶数. 又因为 $d(v_0) = 1(v_0) + 2(v_0)$, 所以必有 $|1(v_0) - 2(v_0)| \geq 2$, 即 C 不是均匀边染色. 由 C 的任意性, 可知图 G 不存在 2 种颜色的均匀边染色, 即 $\chi''(G) \neq 2$.

其次, 证明 $\chi''(G) = 3$. 若 $l \not\equiv 0 \pmod{3}$, 则由引理 2 可知, 图 G 存在 3 种颜色的均匀边染色, 即有 $\chi''(G) = 3$. 若 $l \equiv 0 \pmod{3}$, 则 l 可以表示成 $l = 6(2t + 1)$ 的形式, 其中 t 为非负整数.

由引理 4 可知, 图 G 存在一个几乎均匀 3-边染色. 在图 G 的所有几乎均匀 3-边染色中, 令 C 为使

$\alpha(C)$ 达到最小的染色. 如果 $\alpha(C) = 0$, 则 C 为均匀 3-边染色.

下面用反证法, 假设 $\alpha(C) > 0$, 则存在 $v \in V(G)$ 和 $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, 使得 $\alpha(x) - \beta(x) = 2$.

如果边导出子图 $H = G(x, \alpha, \beta)$ 不是障碍子图, 则由引理 3 可知, 用颜色 α, β 对图 H 中的边重新染色, 得到满足 $\alpha(C') < \alpha(C)$ 的几乎均匀边染色 C' , 产生矛盾.

假设 $H = G(x, \alpha, \beta)$ 为障碍子图. 对于任意的 $y \in V(H) \setminus \{x\}$, 因为 C 是几乎均匀边染色, 所以必有

$$\alpha(y) = \beta(y) = 2(2t+1),$$

$$\text{且} \quad \alpha(x) = 2(2t+1) + 1, \quad \beta(x) = 2(2t+1) - 1.$$

设图 H 的阶为 q , 则由引理 1 可知

$$|E(G)| = \frac{4(2t+1)}{2} \cdot q = 2(2t+1)q.$$

$|E(G)|$ 为偶数, 与障碍子图的定义矛盾. 从而定理 2 的情形 (i) 得证. 证毕.

参考文献:

- [1] HILTON A J W, de WERRA D. A sufficient condition for equitable edge-coloring of simple graphs[J]. Discrete Mathematics, 1994, 128(1/3): 179-201.
- [2] de WERRA D. Equitable colorations of graphs[J]. Reveu Francaise d' Informatique et de Recherche Operationelle, 1971, 5(3): 3-8.
- [3] WU Jian-liang. The equitable edge-colouring of outerplanar graphs[J]. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2001, 36(1): 247-253.
- [4] 宋慧敏, 龙和平, 吴建良. Halin 图的均匀边染色[J]. 山东大学学报: 理学版, 2003, 38(2): 32-34.
- [5] 王志雄. 混合超图的星染色[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1996, 17(2): 123-126.
- [6] 宋慧敏, 刘桂真. 图的 f -边覆盖染色[J]. 数学学报, 2005, 48(5): 919-928.
- [7] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 2 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2004: 13.
- [8] HAKIMI S L, KARIV O. A generalization of edge-coloring in graphs[J]. Journal of Graph Theory, 1986, 10(2): 139-154.

Equitable Edge-Coloring of Regular Graph

YU Gang, SONG Hai-zhou

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The equitable edge-coloring of a regular graph is studied in this paper. It is shown that equitable edge-colorings with any colors can't be done for all regular graphs. It is proved that a l -regular graph has an equitable edge-coloring with k colors when $l = kb$ where k and b are integer and b is even. The minimum number of colors for a regular graph to have an equitable edge-coloring is given, too.

Keywords: regular graph; edge coloring; equitable edge; nearly equitable edge

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)