文章编号: 1000-5013(2010)06-0706-05

GPSD 迭代法的收敛性定理

陈恒新

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 给出了一些易于检验的广义的预条件件同时置换(GPSD)迭代法的收敛性定理. 利用这些定理, 能够较容易地判别解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f}$ 的 GPSD 迭代法的收敛性. 数值例子证明, 定理具有较好的实用价值.

关键词: 线性方程组; GPSD 迭代法; PSD 迭代法; 收敛性

中图分类号: O 241.6　　文献标识码: A

广义的预条件件同时置换(GPSD)迭代法包含了 PSD 迭代法, 而 PSD 迭代法则包含了 Jacobi 超松弛迭代法(JOR), 对称超松弛迭代法(SSOR), 预优 Jacobi 迭代法(PJ) 等迭代法[1-3]. 文[1]在线性方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为相容次序矩阵及 $\boldsymbol{A}$ 的 Jacobi 迭代矩阵的特征值 μ_j 均为实数且 $\mu_j^2<1$ 的条件下, 证明了 PSD 迭代法收敛的充分必要性定理. 文[2]在线性方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵或非奇异 $\boldsymbol{H}$-阵的情况下, 研究了 PSD 迭代法的收敛性. 本文对 GPSD 迭代法做进一步的研究, 给出了一些易于检验的 GPSD 迭代法的收敛性定理.

1　GPSD 迭代法

设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}$ 是 $n\times n$ 实矩阵. 其中: $\boldsymbol{D}$ 是非奇异对角阵; $\boldsymbol{E}$ 是严格下三角阵; $\boldsymbol{F}$ 是严格上三角阵. 记 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{F}$, 对角矩阵 $\Omega=\operatorname{diag}(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$; $\boldsymbol{T}=\operatorname{diag}(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$, $\tau_i\neq 0$, $i=1,\cdots,n$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jacobi 迭代矩阵为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$, 且记 $\boldsymbol{B}=[b_{i,j}]$. 其中: $b_{i,i}=0$, $i=1,2,\cdots,n$.

求解线性代数方程组
$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f} \tag{1}$$
的 GPSD 迭代法为
$$\boldsymbol{x}^{(m+1)}=\boldsymbol{S}_{T,\Omega}\boldsymbol{x}^{(m)}+(\boldsymbol{I}-\Omega\boldsymbol{U})^{-1}(\boldsymbol{I}-\Omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{TD}^{-1}\boldsymbol{b},\qquad m=0,1,2,\cdots, \tag{2}$$
其 GPSD 法迭代矩阵为
$$\boldsymbol{S}_{T,\Omega}=(\boldsymbol{I}-\Omega\boldsymbol{U})^{-1}(\boldsymbol{I}-\Omega\boldsymbol{L})^{-1}[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})+(\boldsymbol{T}-\Omega)(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})+\Omega\boldsymbol{L}\Omega\boldsymbol{U}]. \tag{3}$$

当取 $\boldsymbol{T}=\tau\boldsymbol{I}$, $\Omega=\omega\boldsymbol{I}$ 时, GPSD 迭代法便成为 PSD 迭代法[1].

为了叙述方便, 引入如下记法:

(1) 记 Jacobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{B}=[b_{i,j}]$, 空集为 ϕ, $\boldsymbol{N}_1\oplus\boldsymbol{N}_2=\tilde{\boldsymbol{N}}_1\oplus\tilde{\boldsymbol{N}}_2=\boldsymbol{N}=\{1,2,\cdots,n\}$, 且 $\boldsymbol{N}_1\cap\boldsymbol{N}_2=\phi$, $\tilde{\boldsymbol{N}}_1\cap\tilde{\boldsymbol{N}}_2=\phi$.

(2) 记 $b_i=\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|$, $\tilde{b}_i=|b_{j,i}|$, $\boldsymbol{N}^-=\{i\mid b_i<1, i\in\boldsymbol{N}\}$, $\boldsymbol{N}^+=\{i\mid b_i\geqslant 1, i\in\boldsymbol{N}\}$, $\tilde{\boldsymbol{N}}^-=\{i\mid b_i<1, i\in\boldsymbol{N}\}$, $\tilde{\boldsymbol{N}}^+=\{i\mid b_i\geqslant 1, i\in\boldsymbol{N}\}$, 则有 $\boldsymbol{N}^-\oplus\boldsymbol{N}^+=\tilde{\boldsymbol{N}}^-\oplus\tilde{\boldsymbol{N}}^+=\boldsymbol{N}$.

(3) 记 $\alpha_i=\sum_{j\in\boldsymbol{N}_1}|b_{i,j}|$, $\beta_i=\sum_{j\in\boldsymbol{N}_2}|b_{i,j}|$, $\tilde{\alpha}_i=\sum_{j\in\boldsymbol{N}_1}|b_{j,i}|$, $\tilde{\beta}_i=\sum_{j\in\boldsymbol{N}_2}|b_{j,i}|$, 可得 $\alpha_i+\beta_i=b_i$, $\tilde{\alpha}_i+\tilde{\beta}_i=\tilde{b}_i$.

(4) 集合 $\boldsymbol{K}-\boldsymbol{L}=\{i\mid i\in\boldsymbol{K}$ 而 $i\notin\boldsymbol{L}\}$, 对任一 n 阶方阵 $\boldsymbol{G}=[g_{i,j}]$, $|\boldsymbol{G}|=[|g_{i,j}|]$.

需要说明的是, 文中所取数集 $\boldsymbol{N}_1$, $\tilde{\boldsymbol{N}}_1$, $\boldsymbol{N}_2$, $\tilde{\boldsymbol{N}}_2$ 皆非空.

收稿日期: 2009-12-16

通信作者: 陈恒新(1956-), 男, 副教授, 主要从事计算数学的研究. E-mail: chenhx@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金计划资助项目(S0650018)

2　非负矩阵的性质

定义 1　对于 $n\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{M}$ 及 $\boldsymbol{N}$, 如果 $\boldsymbol{M}$ 非奇异, 并且有 $\boldsymbol{M}^{-1}\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{N}\geqslant 0$, 则称 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$ 为矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的正规分裂. 由文 [4] 定理 3. 8, 定理 3. 13 可得引理 1, 2 .

引理 1　设 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{G}\geqslant 0$, 则 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}$ 非奇异且 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}\geqslant 0$ 的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{G})<1$.

引理 2　设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$ 为矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的正规分裂, 且 $\boldsymbol{G}^{-1}\geqslant 0$, 则 $\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})<1$.

引理 3[5]　若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 且 $|\boldsymbol{B}|\leqslant \boldsymbol{A}$, 则 $\rho(\boldsymbol{B})\leqslant\rho(\boldsymbol{A})$.

3　GPSD 迭代法的收敛性定理

定理 1　设线性方程组(1)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $\boldsymbol{H}$–矩阵, 则当

$$0<\tau_i<\frac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)},\qquad 0\leqslant\omega_i\leqslant\tau_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

时, 解方程组(1)的 GPSD 迭代法(2)收敛. 它隐含 PSD$\left(0<\tau<\frac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}, 0\leqslant\omega\leqslant\tau\right)$, SSOR$(0<\omega<2)$, JOR$\left(0<\tau<\frac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}\right)$, PJ$(0<\omega\leqslant 1)$ 等迭代法收敛.

证明　因为 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $\boldsymbol{H}$–矩阵, 则有 $\rho(|\boldsymbol{B}|)<1$, 其中 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{L}|+|\boldsymbol{U}|$. 又因为 $\boldsymbol{U}$ 为严格上三角矩阵, $\Omega=\mathrm{diag}(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\geqslant 0$, 所以有 $\rho(\Omega\boldsymbol{U})=0$, $\rho(\Omega|\boldsymbol{U}|)=0$. 于是有

$$|(\boldsymbol{I}-\Omega\boldsymbol{U})^{-1}|=|\boldsymbol{I}+\Omega\boldsymbol{U}+(\Omega\boldsymbol{U})^2+\cdots+(\Omega\boldsymbol{U})^k+\cdots|\leqslant$$
$$\boldsymbol{I}+\Omega|\boldsymbol{U}|+(\Omega|\boldsymbol{U}|)^2+\cdots+(\Omega|\boldsymbol{U}|)^k+\cdots=(\boldsymbol{I}-\Omega|\boldsymbol{U}|)^{-1}.$$

同理, 因 $\boldsymbol{L}$ 为严格下三角矩阵, 故有

$$|(\boldsymbol{I}-\Omega\boldsymbol{L})^{-1}|\leqslant(\boldsymbol{I}-\Omega|\boldsymbol{L}|)^{-1}.$$

于是有

$$|(\boldsymbol{I}-\Omega\boldsymbol{U})^{-1}(\boldsymbol{I}-\Omega\boldsymbol{L})^{-1}|\leqslant(\boldsymbol{I}-\Omega|\boldsymbol{U}|)^{-1}(\boldsymbol{I}-\Omega|\boldsymbol{L}|)^{-1}.\tag{4}$$

现记

$$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{I}-\Omega\boldsymbol{L})(\boldsymbol{I}-\Omega\boldsymbol{U}),\tag{5}$$
$$\boldsymbol{N}=[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})+(\boldsymbol{T}-\Omega)(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})+\Omega\boldsymbol{L}\Omega\boldsymbol{U}].\tag{6}$$

由式(3)可知

$$\boldsymbol{S}_{T,\Omega}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}.\tag{7}$$

令

$$\tilde{\boldsymbol{M}}=(\boldsymbol{I}-\Omega|\boldsymbol{L}|)(\boldsymbol{I}-\Omega|\boldsymbol{U}|),\tag{8}$$

则由式(4), (5)有

$$0\leqslant|\boldsymbol{M}^{-1}|\leqslant\tilde{\boldsymbol{M}}^{-1}.\tag{9}$$

(i) 当 $0<\tau_i\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$ 时, 因 $0\leqslant\omega_i\leqslant\tau_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 令

$$\tilde{\boldsymbol{N}}=[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})+(\boldsymbol{T}-\Omega)(|\boldsymbol{L}|+|\boldsymbol{U}|)+\Omega|\boldsymbol{L}|\Omega|\boldsymbol{U}|].\tag{10}$$

由于 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(1-\tau_1,1-\tau_2,\cdots,1-\tau_n)\geqslant 0$, $\boldsymbol{T}-\Omega=\mathrm{diag}(\tau_1-\omega_1,\tau_2-\omega_2,\cdots,\tau_n-\omega_n)\geqslant 0$, 故可知 $\tilde{\boldsymbol{N}}\geqslant 0$, 则有

$$|\boldsymbol{S}_{T,\Omega}|=|\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}|\leqslant\tilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{N}}.\tag{11}$$

由定义 1 可知, $\tilde{\boldsymbol{G}}=\tilde{\boldsymbol{M}}-\tilde{\boldsymbol{N}}$ 为正规分裂, 且有

$$\tilde{\boldsymbol{G}}=\tilde{\boldsymbol{M}}-\tilde{\boldsymbol{N}}=(\boldsymbol{I}-\Omega|\boldsymbol{L}|)(\boldsymbol{I}-\Omega|\boldsymbol{U}|)-[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})+(\boldsymbol{T}-\Omega)(|\boldsymbol{L}|+|\boldsymbol{U}|)+$$
$$\Omega|\boldsymbol{L}|\Omega|\boldsymbol{U}|]=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{L}|-|\boldsymbol{U}|)=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{B}|).$$

因为 $|\boldsymbol{B}|\geqslant 0$, $\rho(|\boldsymbol{B}|)<1$, $0<\tau_i\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$.

由引理 1 可知, $\tilde{\boldsymbol{G}}^{-1}=(\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{B}|)^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\geqslant 0$. 由引理 2 可得

$$\rho(\tilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{N}})<1.\tag{12}$$

所以, 由式(11), (12)并据引理 3 可得

$$\rho(S_{T,\Omega}) \leqslant \rho(\tilde{M}^{-1}\tilde{N}) < 1.$$

即GPSD迭代法收敛.

(ii) 当 $1<\tau_i<\frac{2}{1+\rho(|B|)}$, $i=1,2,\cdots,n$ 时, 因 $0\leqslant\omega_i\leqslant\tau_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 令

$$\tilde{N}^{(2)} = [(T-I)+(T-\Omega)(|L|+|U|)+\Omega|L|\Omega|U|]. \tag{13}$$

由式(6),(13)可知

$$0\leqslant|N|\leqslant\tilde{N}^{(2)},\qquad |S_{T,\Omega}|\leqslant|M^{-1}N|\leqslant\tilde{M}^{-1}\tilde{N}^{(2)}. \tag{14}$$

由定义可知, $\tilde{G}^{(2)}=\tilde{M}-\tilde{N}^{(2)}$ 为正规分裂, 且有

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{(2)} &= \tilde{M}-\tilde{N}^{(2)} = (I-\Omega|L|)(I-\Omega|U|)-[(T-I)+(T-\Omega)(|L|+\\ &|U|)+\Omega|L|\Omega|U|] = (2I-T)-T(|L|+|U|) = \\ &(2I-T)-T(|B|) = (2I-T)(I-(2I-T)^{-1}T|B|).\end{aligned} \tag{15}$$

因为 $1<\tau_i<\frac{2}{1+\rho(|B|)}\leqslant 2$, $i=1,2,\cdots,n$. 所以 $2-\tau_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$. 由此可知, 对角矩阵 $(2I-T)\geqslant 0$, $(2I-T)^{-1}\geqslant 0$. 又因为

$$\begin{aligned}(2I-T)^{-1}T|B| &= \left[\frac{\tau_i}{2-\tau_i}|b_{i,j}|\right]\leqslant\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{\tau_i}{2-\tau_i}\right)|b_{i,j}|\right] = \\ &\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{\tau_i}{2-\tau_i}\right)[|b_{i,j}|] = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{\tau_i}{2-\tau_i}\right)\cdot|B|.\end{aligned} \tag{16}$$

由 $1<\tau_i<\frac{2}{1+\rho(|B|)}$, $i=1,2,\cdots,n$, 有 $\tau_i(1+\rho(|B|))<2\Rightarrow\tau_i\rho(|B|)<2-\tau_i$, $\frac{\tau_i}{2-\tau_i}\rho(|B|)<1$, $i=1,2,\cdots,n$, 则有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{\tau_i}{2-\tau_i}\right)\rho(|B|)<1$. 所以由式(16)并据引理3及上式, 可得

$$\rho((2I-T)^{-1}T|B|)\leqslant\rho\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{\tau_i}{2-\tau_i}\right)|B|\right] = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{\tau_i}{2-\tau_i}\right)\cdot\rho(|B|)<1. \tag{17}$$

于是, 由式(15),(17)并据引理1可知

$$(G^{(2)})^{-1} = (I-(2I-T)^{-1}T|B|)^{-1}(2I-T)^{-1}\geqslant 0.$$

再由引理2可得

$$\rho(\tilde{M}^{-1}N^{(2)})<1. \tag{18}$$

所以, 由式(14),(18)并据引理3可得

$$\rho(S_{T,\Omega})\leqslant\rho(\tilde{M}^{-1}N^{(2)})<1.$$

此时, GPSD迭代法也收敛. 证毕.

引理4 对于任意的 $i\in N_1$, $j\in N_2$, 若 $i,j\in N^-$, 则恒成立

$$r_{i,j} = \alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1.$$

证明 因为 $i,j\in N^-$, 所以有 $\alpha_i+\beta_i=b_i<1$, $\alpha_j+\beta_j=b_j<1$, 则有 $0\leqslant\beta_i<1-\alpha_i$ 和 $0\leqslant\alpha_j<1-\beta_j$. 于是有 $\alpha_j\beta_i<(1-\alpha_i)(1-\beta_j)$, 从而有

$$r_{i,j} = \alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1.$$

定理2 在线性方程组(1)矩阵 A 的Jacobi迭代矩阵 B 中任取一 $N_1\subset N^-$, 如果对 $i\in N_1$, $j\in N^+$, $r_{i,j}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1$ 成立, 则当 $0<\tau_i<\frac{2}{1+\rho(|B|)}$, $0\leqslant\omega_i\leqslant\tau_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 时, 解方程组(1)的GPSD迭代法(2)收敛. 它隐含 PSD($0<\tau<\frac{2}{1+\rho(|B|)}$, $0\leqslant\omega\leqslant\tau$), SSOR($0<\omega<2$), JOR($0<\tau<\frac{2}{1+\rho(|B|)}$), PJ($0<\omega\leqslant 1$)等迭代法收敛.

注1 因定理2(以及定理3)中 N_1(或 $\tilde{N}_1$)可在 N^-(或 $\tilde{N}^-$)中任取, 所以该定理的应用性较广.

证明 若 $N_1=N^-$, 则 $N_2=N^+$; 若 $N_1\neq N^-$, 则 $N_2-N^+\neq\phi$. 因为 $i\in N_1\subset N^-$, 对 $j\in N_2-N^+$, 有 $b_j<1$, 即 $j\in N^-$. 由引理4可知, $r_{i,j}<1$.

据此及定理条件, 可知对一切 $i\in N_1$, $j\in N_2$, 有 $r_{i,j}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1$ 恒成立. 所以可得

$$0 \leqslant \alpha_j \beta_i < (1-\alpha_i)(1-\beta_j). \tag{19}$$

又由 $\alpha_i+\beta_i=b_i<1$, 可得

$$0 \leqslant \beta_i < 1-\alpha_i. \tag{20}$$

由式(19), (20) 可知, $1-\beta_j>0$. 因此, $\beta_j<1$.

若$\{i \mid \beta_i>0, i\in N_1\}\neq\phi$, 对于 N_1 中一切使 $\beta_i>0$ 的 i 有 $0\leqslant\frac{\alpha_j}{1-\beta_j}<\frac{1-\alpha_i}{\beta_i}$, 取

$$\max_{j\in N_2}\left(\frac{\alpha_j}{1-\beta_j}\right) < h < \max_{i\in N_1,\ \beta_i>0}\left(\frac{1-\alpha_i}{\beta_i}\right);$$

否则, $\{i \mid \beta_i>0, i\in \boldsymbol{N}_1\}\neq\phi$, 即 $\beta_i\equiv 0$, $i\in\boldsymbol{N}_1$, 则取

$$\max_{j\in N_2}\left(\frac{\alpha_j}{1-\beta_j}\right) < h < +\infty.$$

作 $\boldsymbol{H}=\mathrm{diag}(h_i \mid h_i, i\in\boldsymbol{N}_2; h_i=1, i\in\boldsymbol{N}_1)$. 显然, $\boldsymbol{H}$ 为非负非奇对角阵. 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{H}=[b_{i,j}^{(1)}]$, 则有 $b_{i,j}^{(1)}=h_i^{-1}b_{i,j}h_j$, $i,j\in\boldsymbol{N}$. 所以有

$$b_i^{(1)}=\alpha_i+h\beta_i=\begin{cases}\alpha_i<1, & \beta_i=0,\quad i\in\boldsymbol{N}_1,\\ \alpha_i+h\beta_i<\alpha_i+\left(\dfrac{1-\alpha_i}{\beta_i}\right)\beta_i=1, & \beta_i>0,\quad i\in\boldsymbol{N}_1,\end{cases}$$

$$b_j^{(1)}=\alpha_j\frac{1}{h}+\beta_j=\begin{cases}\beta_j<1, & \alpha_j=0,\quad j\in\boldsymbol{N}_2,\\ \alpha_j\dfrac{1}{h}+\beta_j<\alpha_j\left(\dfrac{1-\beta_j}{\alpha_j}\right)+\beta_j=1, & \alpha_j>0,\quad j\in\boldsymbol{N}_2.\end{cases}$$

于是, 可得 $\|\boldsymbol{B}_1\|_\infty=\max_{i\in N}(b_i^{(1)})<1$. 因为 $\||\boldsymbol{B}_1|\|_\infty=\|\boldsymbol{B}_1\|_\infty$, 所以 $\rho(|\boldsymbol{B}_1|)\leqslant\||\boldsymbol{B}_1|\|_\infty<1$. 由 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{H}$, 有 $b_{i,j}^{(1)}=h_i^{-1}b_{i,j}h_j$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 又 $\boldsymbol{H}=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_n)$ 中, $h_i>0$. 所以有

$$|b_{i,j}^{(1)}|=|h_i^{-1}b_{i,j}h_j|=h_i^{-1}|b_{i,j}|h_j,\qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

即 $|\boldsymbol{B}_1|=\boldsymbol{H}^{-1}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{H}$, 则 $\rho(|\boldsymbol{B}_1|)=\rho(|\boldsymbol{B}|)$.

因此, 有 $\rho(|\boldsymbol{B}|)<1$, 即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $\boldsymbol{H}$-矩阵. 所以, 由定理 1 可知, 当

$$0<\tau_i<\frac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)},\qquad 0\leqslant\omega_i\leqslant\tau_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

时, 解方程组(1) 的 GPSD 迭代法(2) 收敛. 同理, 对列也有如下相应定理.

定理 3　在线性方程组(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jacobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中任取一 $\tilde{\boldsymbol{N}}_1\subset\tilde{\boldsymbol{N}}^-$. 如果对 $i\in\tilde{\boldsymbol{N}}_1$, $j\in\tilde{\boldsymbol{N}}^+$, $\tilde{r}_{i,j}=\tilde{\alpha}_i+\tilde{\beta}_j+\tilde{\alpha}_j\tilde{\beta}_i-\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_j<1$ 成立, 则当 $0<\tau_i<\frac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}$, $0\leqslant\omega_i\leqslant\tau_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 时, 解方程组(1) 的 GPSD 迭代法(2) 收敛. 它隐含 PSD$\left(0<\tau<\frac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}, 0\leqslant\omega\leqslant\tau\right)$, SSOR$(0<\omega<2)$, JOR$\left(0<\tau<\frac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}\right)$, PJ$(0<\omega\leqslant 1)$ 等迭代法收敛.

4　数值例子

例 1　设线性方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{f}$ 中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-1&2\\7&10&-5\\-4&5&-8\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}5&&\\&10&\\&&-8\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 的 Jacobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0.2&-0.4\\-0.7&0&0.5\\-0.5&0.625&0\end{bmatrix}$, $\|\boldsymbol{B}\|_\infty=\|\boldsymbol{B}\|_1=1.2>1$.

因为 $b_1=0.6<1$, $b_2=1.2>1$, $b_3=1.125>1$, 所以 $\boldsymbol{N}^-=\{1\}$, $\boldsymbol{N}^+=\{2,3\}$. 现取 $\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{N}^-$ 则 $\boldsymbol{N}_2=\boldsymbol{N}^+$, 且有 $\alpha_1=0$, $\beta_1=0.6$; $\alpha_2=0.7$, $\beta_2=0.5$; $\alpha_3=0.5$, $\beta_3=0.625$. 因为对 $i\in\boldsymbol{N}_1=\{1\}$, $j\in\boldsymbol{N}^+=\{3,4\}$, 有 $r_{1,2}=0.5+0.7\times0.6=0.92<1$, 和 $r_{1,3}=0.625+0.5\times0.6=0.925<1$ 成立

所以, 由定理 2 可知, 当 $0<\tau_i<\frac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}$, $0\leqslant\omega_i\leqslant\tau_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 时, 解此方程组的 GPSD 迭代

法(2)收敛.

例 2 设线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f}$ 中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10 & -4 & 1 & 1\\ 6.3 & 14 & -2.8 & -4.2\\ 3 & 0.5 & -5 & -2.5\\ -2 & 2 & -1.5 & 5\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}10 & & & \\ & 14 & & \\ & & -5 & \\ & & & 5\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 的 Jacobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & -0.1 & -0.1\\ -0.45 & 0 & 0.2 & 0.3\\ 0.6 & 0.1 & 0 & -0.5\\ 0.4 & -0.4 & 0.3 & 0\end{bmatrix}$,

$\|\boldsymbol{B}\|_\infty=1.2>1$, $\|\boldsymbol{B}\|_1=1.45>1$.

因为 $b_1=0.6<1$, $b_2=0.95<1$, $b_3=1.2>1$, $b_4=1.1>1$, 所以 $\boldsymbol{N}^-=\{1,2\}$, $\boldsymbol{N}^+=\{2,3\}$. 又因 $\tilde{b}_1=1.45>1$, $\tilde{b}_2=0.9<1$, $\tilde{b}_3=0.6<1$, $\tilde{b}_4=0.9<1$, 所以 $\tilde{\boldsymbol{N}}^-=\{2,3,4\}$, $\tilde{\boldsymbol{N}}^+=\{1\}$.

若直接取 $\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{N}^-$, $\boldsymbol{N}_2=\boldsymbol{N}^+$, 因 $r_{2,3}=0.45+0.5+07\times0.5-0.45\times0.5=1.075>1$; 若取 $\tilde{\boldsymbol{N}}_1=\tilde{\boldsymbol{N}}^-$, $\tilde{\boldsymbol{N}}_2=\tilde{\boldsymbol{N}}^+$, 因 $\tilde{r}_{2,1}=0.5+1.45\times0.4=1.08>1$. 所以, 不能用文中定理判别解该方程组之 GPSD 法的收敛性. 但是, 由于文中定理的 $\tilde{\boldsymbol{N}}_1$ (或 $\tilde{\boldsymbol{N}}_1$), 可在 $\tilde{\boldsymbol{N}}^-$ (或 $\tilde{\boldsymbol{N}}^-$) 中任取, 所以其应用性较广. 如在例 2 中, 可取 $\boldsymbol{N}_1=\{1\}\subset\boldsymbol{N}^-$, 则 $\boldsymbol{N}_2=\{2,3,4\}$, $\alpha_1=0$, $\beta_1=0.6$; $\alpha_3=0.6$, $\beta_3=0.6$; $\alpha_4=0.4$, $\beta_4=0.7$.

于是, 对于 $i\in\boldsymbol{N}_1=\{1\}$, $j\in\boldsymbol{N}^+=\{3,4\}$, 则有 $r_{1,3}=0.6+0.6\times0.6=0.96<1$ 和 $r_{1,4}=0.7+0.4\times0.6=0.94<1$ 成立.

所以, 由定理 2 可知, 当 $0<\tau_i<\dfrac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}$, $0\leqslant\omega_i\leqslant\tau_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 时, 解此方程组的 GPSD 迭代法(2)收敛.

参考文献:

[1] 陈恒新. 关于 PSD 迭代法收敛的充分必要性定理[J]. 应用数学与计算数学学报, 1999, 13(1): 11-20.

[2] 刘兴平. 某些迭代方法的收敛性[J]. 数值计算与计算机应用, 1992, 13(1): 58-64.

[3] 陈恒新. 关于 SSOR 迭代法和 Jacobi 迭代法的敛散性[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1993, 14(1): 20-26.

[4] 瓦格 R S. 矩阵迭代分析[M]. 蒋尔雄, 等译. 上海: 上海科学技术出版社, 1966: 41-130.

[5] 胡家赣. 线性代数方程组的迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 18-19.

Convergence Theorem of GPSD Iterative Method

CHEN Heng-xin

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Some convergence theorems of GPSD (generalized preconditioned simultaneous displacement) iterative method are obtained in this paper. The convergence of GPSD iterative method for solving linear equations $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f}$ can be easily discriminated by use of these theorems. Two numericial examples are given, that shows these theorems had a good practical value.

Keywords: linear equations; GPSD iterative method; PSD iterative method; convergence

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)