第 31 卷 第 6 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 31 No. 6
2010 年 11 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Nov. 2010

文章编号: 1000-5013(2010)06-0703-03

解四阶抛物型方程的高精度显式差分格式

张星, 单双荣

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 对四阶抛物型方程 $u_t + u_{xxxx} = 0$, 构造一个新的三层显式差分格式, 其稳定性条件和局部截断误差阶分别为 $r = \tau/h^4 \leqslant 1/8$ 和 $O(\tau^2 + h^6)$, 其结果优于其他四阶抛物型方程的结果. 数值例子表明, 理论分析是正确的, 该格式是有效的.

关键词: 四阶抛物型方程; 高精度; 显式差分格式; 稳定性; 截断误差

中图分类号: O 241.82 文献标识码: A

1960 年, Саульев[1] 对四阶抛物型方程(初边值问题)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant T, \\ &u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ &u(0, t) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = u(1, t) = \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

构造了一个显式格式, 但其局部截断误差阶仅为 $O(\tau + h^2)$, 精度较低; 然后, 又提出两个隐式差分格式, 其局部截断误差阶分别为 $O(\tau^2 + h^2)$ 和 $O(\tau^2 + h^4)$, 但需解线性方程组, 计算量太大. 文[2-3] 分别得到一个显式差分格式, 文[2] 的稳定性条件和截断误差阶分别为 $r = \tau/h^4 < 1/8$ 和 $O(\tau^2 + h^4)$, 而文[3] 的结果是 $r \leqslant 1/16$ 和 $O(\tau^2 + h^6)$. 此外, 文[4] 得到了四阶抛物型方程的隐式格式, 但计算量较大. 本文构造了一个新的三层显式差分格式.

1 差分格式的构造

设问题(1) 的解 $u(x, t)$ 充分光滑, 分别用 τ, h 表示时间 t 及空间 x 方向的步长, 用 u_j^n 表示 $u(jh, n\tau)$ 的差分逼近. 网域由点集 (x_j, t_n) $(j = 0, 1, \cdots, M; n = 0, 1, 2, \cdots)$ 组成, 其中 $x_j = jh$, $t_n = n\tau$, $h = 1/M$, 并设 $r = \tau/h^4$ 为网格比. 用含参数具有对称形式的差分方程

$$\begin{aligned} &C_0 u_j^{n+1} + C_1 u_{j-2}^n + C_2 u_{j-1}^n + C_3 u_j^n + C_2 u_{j+1}^n + C_1 u_{j+2}^n + \\ &C_4 u_{j-2}^{n-1} + C_5 u_{j-1}^{n-1} + C_6 u_j^{n-1} + C_5 u_{j+1}^{n-1} + C_4 u_{j+2}^{n-1} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

逼近微分方程(1). 式(2) 中, C_i $(i = 0, 1, \cdots, 6)$ 为待定参数.

当微分方程(1) 的解充分光滑时, 有

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial t^q} = (-1)^q \frac{\partial^{p+4q} u}{\partial x^{p+4q}}, \qquad p, q = 0, 1, 2, 3, \cdots, \tag{3}$$

将式(2) 中各节点上的 u 在网点 (x_j, t_n) 处进行 Taylor 展开, 且两边同时乘以 $1/h^4$, 整理可得

$$\frac{1}{h^4}(C_0 + 2C_1 + 2C_2 + C_3 + 2C_4 + 2C_5 + C_6) u_j^n + r(C_0 - 2C_4 - 2C_5 - C_6) \frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$\tau r\left(\frac{C_0}{2} + C_4 + C_5 + \frac{C_6}{2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau^2 r\left(\frac{C_0}{6} - \frac{C_4}{3} - \frac{C_5}{3} - \frac{C_6}{6}\right) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} +$$

收稿日期: 2008-11-23

通信作者: 单双荣(1956-), 男, 教授, 主要从事微分方程数值解的研究. E-mail: shansr@hqu.edu.cn.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(04QZR09)

$$\frac{1}{h^2}(4C_1+C_2+4C_4+C_5)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{4}{3}C_1+\frac{1}{12}C_2+\frac{4}{3}C_4+\frac{1}{12}C_5\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+$$
$$h^2 r(-4C_4-C_5)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+h^2\left(\frac{8}{45}C_1+\frac{1}{360}C_2+\frac{8}{45}C_4+\frac{1}{360}C_5\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+$$
$$\tau h^2 r\left(2C_4+\frac{C_5}{2}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+h^4\frac{1}{8!}(2^9C_1+2C_2+2^9C_4+2C_5)\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+$$
$$\tau\left(-\frac{4}{3}C_4-\frac{1}{12}C_5\right)\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4}+h^6 r\left(-\frac{8}{45}C_4-\frac{1}{360}C_5\right)\frac{\partial^7 u}{\partial t\partial x^6}+$$
$$h^6\frac{1}{10!}(2^{11}C_1+2C_2+2^{11}C_4+2C_5)\frac{\partial^{10}u}{\partial x^{10}}+O(\tau^3+\tau^2h^2+\tau^2h^3+h^7)=0.$$

利用式(3),当以下条件

$$\left.\begin{aligned}
&C_0+2C_1+2C_2+C_3+2C_4+2C_5+C_6=0,\\
&r(C_0-2C_4-2C_5-C_6)-\left(\frac{4}{3}C_1+\frac{1}{12}C_2+\frac{4}{3}C_4+\frac{1}{12}C_5\right)=0,\\
&r\left(\frac{C_0}{2}+C_4+C_5+\frac{C_6}{2}\right)+\frac{4}{3}C_4+\frac{1}{12}C_5=0,\\
&4C_1+C_2+4C_4+C_5=0,\\
&r(4C_4+C_5)+\frac{8}{45}C_1+\frac{1}{360}C_2+\frac{8}{45}C_4+\frac{1}{360}C_5=0,\\
&2^9C_1+2C_2+2^9C_4+2C5=0,\qquad 2C_4+\frac{C_5}{2}=0
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

同时成立时,差分格式(2)的截断误差阶可达 $O(\tau^2+h^6)$. 解方程组(4)可得 $C_0=C_1/r$, $C_2=-4C_1$, $C_3=6C_1-2C_1/r$, $C_4=-C_1$, $C_5=4C_1$, $C_6=C_1/r-6C_1$.

将以上各参数值代入式(2)中,可得三层显式差分格式为

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}=&-(u_{j-2}^n+u_{j+2}^n+4r(u_{j-1}^n+u_{j+1}^n)+(2-6r)u_j^n+\\&r(u_{j-2}^{n-1}+u_{j+2}^{n-1}-4r(u_{j-1}^{n-1}+u_{j+1}^{n-1})+(6r-1)u_j^{n-1},\end{aligned}\tag{6}$$

其局部截断误差为 $O(\tau^2+h^6)$.

2 差分格式稳定性

引理1 即Mille准则[5],实系数二次方程 $Ax^2+Bx+C=0(A>0)$ 的两个根按模小于等于1的充要条件:$A-C\geqslant 0$, $A+B+C\geqslant 0$, $A-B+C\geqslant 0$.

定理1 当 $0<r\leqslant 1/8$ 时,格式(6)至少在Forsythe-Wasow[6]意义下条件稳定.

证明 令 $u_j^n=\rho^n e^{ij\alpha}(i=\sqrt{-1})$,由Fourier分析法[7]可知,格式(6)的特征方程为

$$A\rho^2+B\rho+C=0.\tag{7}$$

上式中,$A=1$, $B=r(4\cos^2\alpha-2)-8r\cos\alpha+6r-2$, $B=-[r(4\cos^2\alpha-2)-8r\cos\alpha+6r-1]$.

下面验证特征方程(7)是否满足引理. 首先,$A=1>0$ 成立;其次,对任意 $r>0$,均有

$$A-C=1+r(4\cos^2\alpha-2)-8r\cos\alpha+6r-1=4r(\cos\alpha-1)^2\geqslant 0,$$
$$A+B+C=1>0.$$

当 $0<r\leqslant 1/8$ 时,有

$$\begin{aligned}A-B+C=&1-[r(4\cos^2\alpha-2)-8r\cos\alpha+6r-2]-[r(4\cos^2\alpha-2)-8r\cos\alpha+6r-1]=\\&4-8r(\cos\alpha-1)^2=4(1-8r\sin^4(\alpha/2))\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此,当 $0<r\leqslant 1/8$ 时,满足引理的条件1, Von Neumann条件成立. 所以,格式(6)至少在Forsythe-Wasow[6]意义下条件稳定.

3 数值例子

解四阶抛物型方程的混合问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, \quad 0<x<\pi, \quad t>0,\\&u(x,0)=f(x), \quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\\&u(0,t)=\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=u(1,t)=\frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2}=0, \quad t>0,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其精确解为 $u(x,t)=e^{-t}\sin x$. 边界条件的处理与文[1]相同, 即采用中心差商代替微商. 于是, 有 $u_0^n=u_M^n=0, u_{-1}^n=-u_1^n=0, u_{M+1}^n=-u_{M-1}^n=0$. 对于初始条件的处理, 则用直接转移法, 可得 $u_j^0=\sin jh, (j=0,1,\cdots,M; n=0,1,2,\cdots)$.

所构造的显格式(6)是三层格式, 启动值除了初始层网格函数值以外, 还需用其他方法先算出第 1 层网格函数值. 为了方便, 按精确值代替第 1 层的值进行计算(实际计算可用同精度的两层隐格式计算第 1 层的值). 当 $h=\pi/10$ 时, 利用格式(6)进行求数值解, 不同网格比 r 的精确解比较, 如表 1 所示.

表 1　格式(6)的数值结果对应值

Tab. 1　Corresponding value of Numerical results of scheme (6)

r		x	$\pi/10$	$2\pi/10$	$3\pi/10$	$4\pi/10$	$5\pi/10$
		精确解	0.168 105	0.319 755	0.440 105	0.517 374	0.544 000
1/8	$h=\frac{\pi}{10}$	差分解	0.167 498	0.318 599	0.438 514	0.515 505	0.542 034
		绝对误差	$6.074\,953\times 10^{-4}$	0.001 156	0.001 590	0.001 870	0.001 966
1/16	$h=\frac{\pi}{10}$	差分解	0.167 486	0.318 576	0.438 483	0.515 467	0.541 994
		绝对误差	$6.196\,036\times 10^{-4}$	0.001 176	0.001 622	0.001 907	0.002 005
1/32	$h=\frac{\pi}{10}$	差分解	0.167 479	0.318 565	0.438 467	0.515 449	0.541 975
		绝对误差	$6.256\,647\times 10^{-4}$	0.001 190	0.001 638	0.001 926	0.002 025

华侨大学数学科学学院曾文平教授给予的悉心指导, 特此致谢.

参考文献:

[1] САУЛЪЕВ К. 抛物型方程的网格积分法[M]. 袁兆鼎, 译. 北京: 科学出版社, 1963: 143-152.

[2] 曾文平. 解四阶抛物型方程的高精度显式差分格式[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1997, 18(2): 122-127.

[3] 单双荣. 解四阶抛物型方程的高精度差分格式[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2003, 24(1): 11-15.

[4] 林鹏程. 解四阶抛物型方程的绝对稳定高精度差分格式[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 1994, 33(6): 756-759.

[5] MILLER J J H. On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis[J]. J Inst Math Appls, 1971, 8(3): 394-406.

[6] 矢岛信男, 野木达夫. 发展方程の数值分析[M]. 东京: 岩波书店, 1977: 46-232.

[7] RICHTMYER R D, MORTON K W. Difference method for initial-value problems[M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1967: 59-91.

Explicit Difference Scheme of High Accuracy for Solving Four-Order Parabolic Equation

ZHANG Xing, SHAN Shuang-rong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, a three-level explicit difference scheme is proposed for solving four-order parabolic equation $u_t+u_{xxxx}=0$. The scheme meets a stability condition of $r=\tau/h^4\leqslant 1/8$ and shows a local truncation error of $O(\tau^2+h^6)$. It is showed that the scheme is effective and the analysis of stability is right by a numerical example.

Keywords: four-order parabolic equation; high accuracy; explicit difference scheme; stability

(责任编辑: 陈志贤　　英文审校: 张金顺, 黄心中)