

文章编号: 1000-5013(2010)06-0611-04

采用移动最小二乘的平面散乱点集曲线重构

刘斌, 林俊义, 黄常标, 江开勇

(华侨大学 机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 针对带状分布的无序散乱点集的曲线重构问题, 采用移动最小二乘法对其进行二次局部加权回归和细化点云; 在迭代过程中, 采用逐步减小 K -邻域顶点数的策略, 以兼顾计算效率和精度. 对细化后的点云进行重新排序和稀疏, 把无序点集有序化; 然后, 利用现有的 B 样条曲线重构技术, 对点云进行重构. 最后, 实例验证算法的有效性.

关键词: 曲线重构; 散乱点集; 移动最小二乘; 细化点云; B 样条

中图分类号: TP 391

文献标识码: A

曲线拟合在逼近论和几何造型中都是一个重要的研究课题. 从有序散乱点重建曲线, 已经有了许多成熟的方法^[1-3]. 近年来, 无序数据点的曲线重建已逐步受到人们的重视. 如 Pottmann 等^[4]将原始的数据点集投影到平面网格上, 生成二值图像; Goshtasby^[5]先由离散点构造势函数并生成灰度图像, 最后利用图像细化算法来得到重建曲线. 但是, 文[5]的方法所获得的重建曲线并不能很好地反映点云端点的形状, 并且重建曲线的准确性、正确性受到网格分辨率的影响. Fang 等^[6], Taubin 等^[7]分别利用弹力模型与隐式曲线模型, 把已知数据点作为约束条件, 直接求解曲线参数并得到重建曲线. 文[6-7]的方法常需要优化或迭代求解, 对于噪音过多的数据点集则不够理想. 钟纲等^[8]提出了平面对散乱点集曲线重建的跟踪算法. 本文利用移动最小二乘(Moving Least-Squares, MLS)方法细化点云, 重新对点云排序并进行稀疏, 在获得稀疏的有序点列后, 利用 B 样条插值技术, 获得点云重构的 B 样条曲线.

1 点云细化

1.1 K -邻近构建

由于点云数据只包含点的坐标信息, 没有任何的拓扑结构信息, 所以每一点的微分几何信息如曲率、法矢等, 都只能由其最临近的一些点来决定. 搜索点云中任一点的 K 个最临近点的方法, 一般有栅格法、八叉树法、近似最近邻库(Approximate Nearest Neighbor, ANN)方法, 以及 K - d 树方法等. 文中采用 K - d 树方法来快速构建点云中每一点的 K -邻近.

1.2 局部最小二乘回归

对于二维空间 R^2 内的点集 $S = \{P_i = (x_i, y_i) | i = 1, \dots, N\}$, 采用 K - d 树方法建立点集内每一点的 K -邻近信息, 在局部邻域内进行加权回归; 利用移动最小二乘方法, 使顶点移动到新的位置^[9-12].

1.2.1 局部直线拟合 对于点集 S 内的任一点 P^* , 由其局部邻域点集可以拟合一条直线($L: y = ax + b$), 系数 a, b 的计算式为

$$E = \sum_i^K (ax_i + b - y_i)^2 w_i. \quad (1)$$

收稿日期: 2009-09-23

通信作者: 刘斌(1972-), 男, 副教授, 博士, 主要从事三维反求建模与数字化设计、模具 CAD/CAE/CAM 及其集成技术的研究. E-mail: mold_bin@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省科技计划重点项目(2009H0032, 2008H0085); 福建省自然科学基金资助项目(E0810040); 国务院侨办科研基金资助项目(08QZR01)

式(1)中: K 为点 P^* 的 K -邻近顶点个数(包括点 P^* 本身); w_i 为邻域内各顶点的权值. 权值的选取采用常用的指数表示函数, 即

$$w_i = \exp\left(\frac{-r^2}{H^2}\right). \tag{2}$$

式(2)中: $r = \|P_i - P^*\|^2$; H 为邻域半径, 选取 P^* 的 K -邻域中距离 P^* 最远的点到 P^* 的距离作为 H 值. 为了求 a 和 b 的值, 按照最小二乘法, 由式(1)分别对 a, b 求偏导数, 并令其为零, 可得到求解 a, b 的法方程组, 其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K w_i x_i^2 & \sum_{i=1}^K w_i x_i \\ \sum_{i=1}^K w_i x_i & \sum_{i=1}^K w_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K w_i x_i y_i \\ \sum_{i=1}^K w_i y_i \end{bmatrix}. \tag{3}$$

解此线性方程组, 可求得 P^* 的 K -邻域最小二乘拟合直线($L: y = ax + b$).

1.2.2 基于 MLS 的投影点计算 进行平移和旋转变换, 构建以 P^* 为原点, 以平行于直线 L 的方向为 x 轴的局部坐标系. 其平移和旋转矩阵分别为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -P_x^* & -P_y^* & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

式(4)中: θ 为局部拟合直线与 x 轴正向的夹角, 逆时针为正, 顺时针为负. 由此, 整体的变换矩阵 M 为

$$M = TR. \tag{5}$$

把 P^* 的 K -邻域内的点集 V 变换到新的局部坐标系下, 得到新的点集 $\tilde{P} = VM$, 即 $\tilde{P} = \{\tilde{p}_j = (x_j, y_j) | j = 1, \dots, K\}$; 然后, 用一个二次曲线($Q: \tilde{y} = a\tilde{x}^2 + b\tilde{x} + c$)来逼近该点集. 该曲线的计算式为

$$\min \left[\sum_{i=1}^K (a\tilde{x}_i^2 + b\tilde{x}_i + c - \tilde{y}_i)^2 w_i \right]. \tag{6}$$

同样地, 由式(6)分别对 a, b, c 求偏导数, 并令其为零, 可得到一组线性方程组. 用与求解式(3)同样的方法, 求得局部拟合二次曲线 Q . 此时, 点 $\tilde{P}^*(0, 0)$ 在曲线 Q 上的对应点为 $\hat{P}^*(0, c)$. 通过变换矩阵 M 的逆变换 M^{-1} , 将 \hat{P}^* 变换回原坐标系, 即可得到 P^* 点经 MLS 变换后的新点 $P' = \hat{P}^* M^{-1}$.

对点集 S 中的每一点进行同样的变换, 得到一系列新的 MLS 点, 把 S 中的每一点移动到对应的 MLS 点, 就可使带状分布的无序点集得到细化, 如图 1 所示.

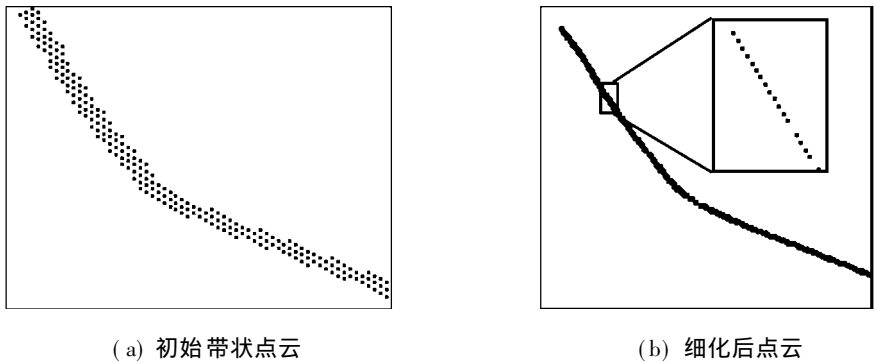


图 1 基于 MLS 的点云细化

Fig. 1 Thinning a point cloud using moving least square

关于 K -邻域中邻近点个数 K 值的选取问题, 有赖于点云本身的分布情况和经验, 一般取 8~20. K 值过大, 一方面增加计算成本, 另一方面因邻域过大而使点云上的细节特征消失; K 值过小, 则对噪声点比较敏感, 特别是对于带状分布的点云, 可能导致计算出的局部拟合直线的方向不是沿着曲线的走向方向, 而是沿曲线的横向而导致计算错误.

为了兼顾计算精度与效率, 在迭代的初始阶段, 点云比较粗的时候, 采用较大的 K 值; 而随着迭代次数的增加, 点云被细化, K 值也逐渐缩小.

2 排序与重构

在通过 MLS 方法获得足够细化的点云后, 将通过对无序点云排序使之有序化, 并根据需要对其进行必要的稀疏化处理, 减少点云顶点个数. 即可利用现有的 B 样条曲线重构技术, 将其拟合为非均匀 B 样条曲线.

2.1 点集排序与稀疏

设点集 S 经过 MLS 细化后所得点集为 $S' = \{P'_i = (x'_i, y'_i) | i = 1, \dots, N\}$, 从中随机选出一一点 P'_j . 根据需要指定一个 K 值, 作为点的 K -邻近顶点个数, 以决定点云稀疏的程度. 如果点云足够细的话, 点 P'_j 及其邻域内的点近似在一条直线上, 那么, 搜寻 P'_j 的 K -邻域中距离 P'_j 最远的点作为下一个搜寻点.

点云排序与稀疏的算法流程有如下 6 个步骤. (1) 从点集中随机选出一一点 P'_j 作为初始点, 计算其 K -邻域 A 及 A 内各点到 P'_j 的距离, 存入数组 d_j ; 按照从大到小的顺序对 d_j 排序, 把 P'_j 存入排序后的新的点列数组 P_{new} 中.

(2) 设 A 中距离 P'_j 最远的点为 P'_{j+1} , 向量 $F = P'_{j+1} - P'_j$ 表示点 P'_j 到 P'_{j+1} 的方向. 把 P'_{j+1} 存入排序后的新的点列数组 P_{new} 中.

(3) 计算点 P'_{j+1} 的 K -邻域 B 及其各点到 P'_{j+1} 的距离, 并按照从大到小的顺序排序.

(4) 从已排序的 B 中循环找出每一点 P'_l , 计算向量 $F_{\text{new}} = P'_l - P'_{j+1}$ 与向量 F 的内积 $e = F_{\text{new}} \cdot F$, 判断 e 值的大小. 如果 $e > 0$, 则将 P'_l 存入排序后的新的点列数组 P_{new} , 以 P'_l 作为新的 P'_{j+1} 转入步骤(3)进行迭代; 如果 $e \leq 0$, 则继续在 B 中循环. 遍历 B 后, 如果所有 $e \leq 0$, 说明该点是点集的端点, 则结束该方向的搜索, 转入步骤(5).

(5) 回到初始点 P'_j , 遍历其 K -邻域 A , 找出与方向 F 反侧的距离 P'_j 最远的点作为 P'_{j+1} , 重复步骤(3), (4), 直至搜索到点云的另一端点.

(6) 在步骤(4)中, 如果点 P'_l 位于初始点 P'_j 的 K -邻域 A 中, 说明点集构成了一个封闭的曲线, 则迭代终止.

2.2 点集的 B 样条曲线重构

对点云进行有序化稀疏后, 即可利用比较成熟的有序点列曲线重构技术对其进行曲线重构. 采用 3 次非均匀 B 样条作为重构曲线类型. 即采用积累弦长参数化方法对有序化的点列进行参数化, 从而确定曲线的节点矢量; 然后, 根据节点矢量反算 3 次 B 样条插值曲线的控制顶点, 求解控制顶点时采用抛物线边界条件. 在计算出曲线的控制顶点后, 用德布尔算法对其进行正算, 得出曲线上的点, 其具体计算细节参照文[13].

3 应用实例

算法已通过 VC 6.0 编程在微机平台上实现. 图 2 是点云重构的一个例子. 图 2(a) 是测量鞋楦曲面时所获得的一条带状点云, 其顶点个数为 1 141. 初始 K 值取 25, 经过 7 次的 MLS 迭代后, 其细化点云如图 2(b) 所示. 经有序化并稀疏后, 点云顶点数为 137.

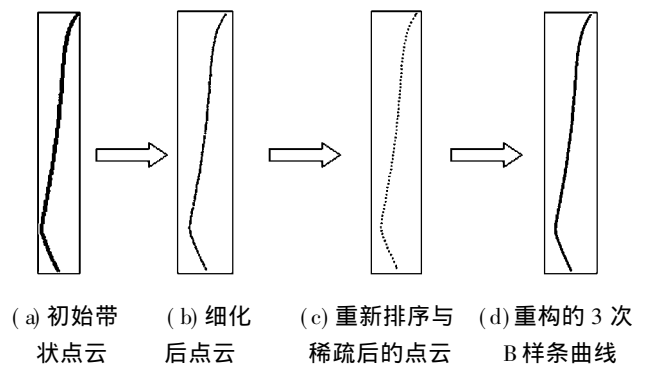


图 2 点云细化与曲线重构过程

Fig. 2 Process of thinning point cloud and curve reconstruction

4 结束语

针对逆向工程中呈带状分布的平面散乱点云曲线重构问题, 基于 K - d 树方法, 快速构建点云的邻接信息. 然后, 利用移动最小二乘方法细化点云, 重新对点云排序并进行稀疏, 在获得稀疏的有序点列后, 利用 B 样条插值技术, 获得点云重构的 B 样条曲线. 算法目前还只适用于平面点集, 下一步的工作是把其扩展到三维, 并进一步提高其计算效率. 而在细化带状点云的同时, 保持其尖角特征也是未来要

解决的问题.

参考文献:

- [1] KORSTERS M. Curvature-dependent parameterization of curves and surfaces[J]. Computer Aided Design, 1991, 23(8): 569-578.
- [2] SARKAR B, MENQ C H. Parameter optimization in approximating curves and surfaces to measurement data[J]. Computer Aided Geometric Design, 1991, 8(4): 267-290.
- [3] YANG Xun-nian, WANG Guo-zhao. Planar point set fairing and fitting by arc splines[J]. Computer Aided Design, 2001, 33(1): 35-43.
- [4] POTTMANN H, RANDRUP T. Rotational and helical surface approximation for reverse engineering[J]. Computing, 1998, 60(4): 307-322.
- [5] GOSHTASBY A A. Grouping and parameterizing irregularly spaced points for curve fitting[J]. ACM Transaction on Graphics, 2000, 19(3): 185-203.
- [6] FANG L, GOSSARD D C. Multidimensional curve fitting to unorganized data points by nonlinear minimization[J]. Computer Aided Design, 1995, 27(1): 48-58.
- [7] TAUBIN G, RONDFARD R. Implicit simplicial models for adaptive curve reconstruction[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, 18(3): 321-325.
- [8] 钟纲, 杨勋年, 汪国昭. 平面对序点集曲线重建的跟踪算法[J]. 软件学报, 2002, 13(11): 2188-2193.
- [9] LEVIN D. The approximation power of moving least-squares[J]. Mathematics of Computation, 1998, 67(224): 1517-1531.
- [10] LEE I K. Curve reconstruction from unorganized points[J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(2): 161-177.
- [11] 顾步云, 周来水, 刘胜兰, 等. 基于平面散乱点集的曲线重建算法[J]. 机械科学与技术, 2007, 26(4): 455-458.
- [12] DANIELS J II, HALK, OCHOTTA T, et al. Robust smooth feature extraction from point clouds[C] // Proc of the 2007 IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications. Washington DC: IEEE Computer Society, 2007: 123-136
- [13] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.

Planar Curve Reconstruction from a Set of Unorganized Points Based on Moving Least Square

LIU Bin, LIN Jun-yi,
HUANG Chang-biao, JIANG Kai-yong

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In allusion to curve reconstruction problem from a set of unorganized points with a zonal distribution, moving least square (MLS) is used to conduct second locally weighted regression and to thin point cloud, in the iteration process of which the strategy of reducing K -neighborhood vertices gradually is adopted in order that both computation efficiency and accuracy could be taken into account. The point cloud being thinned is recorded and resparsed to make unorganized point set orderly, the existing B-spline curve reconstruction technique is used to reconstruct the point cloud. Finally, the validity of the algorithm is proven by the case study.

Keywords: curve reconstruction; unorganized points; moving least square; thinning point cloud; B-spline

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 郑亚青)