文章编号: 1000-5013(2010)05-0590-07

脉冲时滞 Lotka-Volterra 竞争系统的正周期解

汪东树, 王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究一类具有脉冲和分布时滞的非自治周期的 Lotka-Volterra 竞争系统. 利用重合度理论, 得到该系统存在正周期解的新结果. 该结果表明, 脉冲效应对该系统正周期解存在性是有影响的.

关键词: Lotka-Volterra 竞争系统; 时滞; 脉冲; 周期解; 重合度理论

中图分类号: O 175.6　　文献标识码: A

生物种群系统的持续生存和正周期解的存在性都是重要的研究课题, 历来备受学术界关注, 并取得了许多成果[1-5]. 文[2-3]分别研究了具分布时滞的两种群竞争系统, 即

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= u(t)\Big[r_1(t) - a_1(t)u(t) - c_1(t)\int_{-T}^{0} K_1(s)v(t+s)\,\mathrm{d}s\Big],\\ v'(t) &= v(t)\Big[r_2(t) - a_2(t)v(t) - c_2(t)\int_{-T}^{0} K_2(s)u(t+s)\,\mathrm{d}s\Big],\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= u(t)\Big[r_1(t) - a_1(t)u(t) - b_1(t)\int_{-T}^{0} L_1(s)u(t+s)\,\mathrm{d}s - c_1(t)\int_{-T}^{0} K_1(s)v(t+s)\,\mathrm{d}s\Big],\\ v'(t) &= v(t)\Big[r_2(t) - a_2(t)v(t) - b_2(t)\int_{-T}^{0} L_2(s)v(t+s)\,\mathrm{d}s - c_2(t)\int_{-T}^{0} K_2(s)u(t+s)\,\mathrm{d}s\Big]\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

的 ω 正周期解存在性问题.

对于脉冲和分布时滞的非自治周期 Lotka-Volterra 竞争系统, 有

$$\left.\begin{aligned} y'_1(t) &= y_1(t)\Big[r_1(t) - a_1(t)y_1(t) - b_1(t)\int_{-T}^{0} L_1(s)y_1(t+s)\,\mathrm{d}s - c_1(t)\int_{-T}^{0} K_1(s)y_2(t+s)\,\mathrm{d}s\Big],\\ y'_2(t) &= y_2(t)\Big[r_2(t) - a_2(t)y_2(t) - b_2(t)\int_{-T}^{0} L_2(s)y_2(t+s)\,\mathrm{d}s - c_2(t)\int_{-T}^{0} K_2(s)y_1(t+s)\,\mathrm{d}s\Big],\\ \Delta y_i(t_k) &= y_i(t_k^+) - y_i(t_k^-) = \alpha_{i,k}y_i(t_k), \qquad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \cdots\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式(3)中: $t \neq t_k$. 本文利用重合度理论, 研究系统(3)的正周期解存在性问题.

1 准备知识

系统(3)满足以下3点假设: (A1) $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < \omega$, $t_{k+p} = t_k + \omega$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$, $k = 1, 2, \cdots$; (A2) $\{\alpha_{i,k}\}$ 是一个实序列($\alpha_{i,k}$ 可以看成是种群 y_i 在 t_k 时刻的出生率或收获比率)且 $\alpha_{i,k} > -1$, $\alpha_{i,k} = \alpha_{i,k+p}$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \cdots$; (A3) $r_i(t)$ 是连续的 ω 周期函数, $\int_0^{\omega} r_i(t)\,\mathrm{d}t > 0$, $a_i(t)$, $c_i(t)$ 是正的连续 ω 周期函数, $b_i(t)$ 是非负连续的 ω 周期函数, $L_i(s)$ 与 $K_i(s)$ 都是分段连续的且满足正规化假设. 即有

$$\int_{-T}^{0} K_i(s)\,\mathrm{d}s = 1, \qquad \int_{-T}^{0} L_i(s)\,\mathrm{d}s = 1, \qquad i = 1, 2.$$

显然, 系统(3)包含了系统(1), (2).

收稿日期: 2009-05-23

作者简介: 汪东树(1981-), 男, 讲师, 主要从事常微分及泛函微分方程的研究. E-mail: wangds@hqu.edu.cn.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(07QZR09, 09QZR10); 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026)

定义 1　称 $\boldsymbol{y}(t)=(y_1(t),y_2(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统(3)的解．如果 $y_i(t)\in([-T,+\infty),(0,+\infty))$，$i=1,2$，满足：(1) $y_i(t)(i=1,2)$ 分别在区间 $(0,t_1]$ 和 $(t_k,t_{k+1}]$ $(k=1,2,\cdots)$ 上绝对连续的；(2) 对任何 t_k，$k=1,2,\cdots$，$y_i(t_k^+)$ 和 $y_i(t_k^-)$ 都存在且 $y_i(t_k^-)=y_i(t_k)$，$i=1,2$；(3) $y_i(t)$ 在 $[0,+\infty)/\{t_k\}$ 上几乎处处满足系统(3)，且 t_k 是其第一类间断点 $(k=1,2,\cdots)$．

引入重合度理论及延拓引理[6]．假设 X,Z 是赋范向量空间，L：$\mathrm{Dom}\,L\subset X\to Z$ 为线性映射，N：$X\to Z$ 为连续映射．若 $\dim\mathrm{Ker}\,L=\mathrm{co}\dim\mathrm{Im}\,L<+\infty$，且 $\mathrm{Im}\,L$ 为 Z 中闭子集，则称 L 为指标为零的 Fredholm 映射．如果 L 是指标为零的 Fredholm 映射，而且存在连续投影 P：$X\to X$，Q：$Z\to Z$，使得

$$\begin{cases}\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}\,L, & \mathrm{Im}\,L=\mathrm{Ker}\,Q=\mathrm{Im}(1-Q),\\ X=\mathrm{Ker}\,L\oplus\mathrm{Ker}\,P, & Z=\mathrm{Im}\,L\oplus\mathrm{Ker}\,Q,\end{cases}$$

则 $L_p\triangleq L|_{\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P}$：$\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P\to\mathrm{Im}\,L$ 可逆．

设逆映射为 K_P，Ω 为 X 中的有界开集，若 QN：$\overline{\Omega}\to Z$ 与 $K_P(I-Q)N$：$\overline{\Omega}\to X$ 都是紧的，则称 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的．由于 $\mathrm{Im}\,Q$ 与 $\mathrm{Ker}\,L$ 同构，因而存在同构映射 J：$\mathrm{Im}\,Q\to\mathrm{Ker}\,L$．

引理 1[6]　设 X,Z,L,N 如上定义，而且 L 是指标为零的 Fredholm 映射．又设 Ω 为 X 中的有界开集，N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的．

假设：(1) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$，方程 $L\boldsymbol{x}=\lambda N\boldsymbol{x}$ 的解满足 $\boldsymbol{x}\notin\partial\Omega$(这里 $\partial\Omega=\overline{\Omega}/\Omega$)；(2) 对任意的 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$，$QN\boldsymbol{x}\neq0$；(3) Brouwer 度 $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}\neq0$，其中 J,Q 的定义如上．则有方程 $L\boldsymbol{x}=N\boldsymbol{x}$ 在 $\mathrm{Dom}\,L\cap\overline{\Omega}$ 内至少存在一个解．

若 $f(t)$ 是一连续的 ω-周期函数，就记 $\bar{f}=\dfrac{1}{\omega}\int_0^{\omega}f(t)\,\mathrm{d}t$．为了方便叙述，再引入记号，则有

$$h_1=\min\{\ln[\frac{\bar{r}_1\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k})}{(\bar{a}_1+\bar{b}_1)\omega}],\ \ln[\frac{\bar{r}_2\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2,k})}{\bar{c}_2\omega}]\},$$

$$h_2=\min\{\ln[\frac{\bar{r}_2\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2,k})}{(\bar{a}_2+\bar{b}_2)\omega}],\ \ln[\frac{\bar{r}_1\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1,k})}{\bar{c}_1\omega}]\},$$

$$H_1=h_1+\omega(\bar{r}_1+|\bar{r}_1|)+\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+\alpha_{1,k})|+\ln(1+\alpha_{1,k})],$$

$$H_2=h_2+\omega(\bar{r}_2+|\bar{r}_2|)+\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+\alpha_{2,k})|+\ln(1+\alpha_{2,k})],$$

$$H_3=\max\{\frac{\bar{r}_1\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1,k})-\bar{c}_1\omega\exp(H_2)}{(\bar{a}_1+\bar{b}_1)\omega},\ \frac{\bar{r}_2\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k})-(a_2-b_2)\omega\exp(H_2)}{\bar{c}_2\omega}\},$$

$$H_4=\max\{\frac{\bar{r}_2\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k})-\bar{c}_2\omega\exp(H_1)}{(\bar{a}_2+\bar{b}_2)\omega},\ \frac{\bar{r}_1\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k})-(\bar{a}_1+\bar{b}_1)\omega\exp(H_1)}{\bar{c}_1\omega}\}.$$

为了方便研究，引入函数空间．令 $\boldsymbol{X}=\{x(t)$：$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，$x_i\in PC(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$x_i(t+\omega)=x_i(t)$，$i=1,2)\}$，$Z=X\times\mathbf{R}^{2p}$．其中，$PC(\mathbf{R},\mathbf{R})=\{\boldsymbol{x}$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在 $t\neq t_k$ 处连续，$x(t_k^+)$ 和 $x(t_k^-)$ 都存在，而且 $x(t_k^-)=x(t_k)$，$k=1,2,\cdots\}$．对一切 $\boldsymbol{x}\in X$，定义其范数为 $\|\boldsymbol{x}\|_X=\max\{\sup_{t\in[0,\omega]}|x_1(t)|,\sup_{t\in[0,\omega]}|x_2(t)|\}$；而对一切 $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x},\gamma_1,\cdots,\gamma_p)\in Z$($\gamma_k$ 均为 2 维列向量)，定义其范数为 $\|\boldsymbol{z}\|_Z=\|\boldsymbol{x}\|_X+\sum_{k=1}^{p}\|\gamma_k\|$．其中，$\|\cdot\|$ 表示欧氏范数，则 X,Z 在所定义的范数下是一个 Banach 空间．

2　正周期解存在性

定理 1　在系统(3)中，若系数函数满足 $\bar{r}_i\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{i,k})>0$，$i=1,2$ 及 $H_3>0$，$H_4>0$，且

$$\begin{cases}(\bar{a}_1+\bar{b}_1)\omega u_1+\bar{c}_1\omega u_2=\bar{r}_1\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k}),\\(\bar{a}_2+\bar{b}_2)\omega u_2+\bar{c}_2\omega u_1=\bar{r}_2\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k})\end{cases}$$

有唯一正解$(u_1^*,u_2^*)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{2+}$，则系统(3)至少存在一个 ω 正周期解.

证明　作变换 $y_i(t)=\exp(x_i(t))$, $i=1,2$. 则系统(3)可化为

$$\left.\begin{aligned}x'_1(t)=&\ r_1(t)-a_1(t)\exp(x_1(t))-b_1(t)\int_{-T}^{0}L_1(s)\exp(x_1(t+s))\mathrm{d}s-\\&c_1(t)\int_{-T}^{0}K_1(s)\exp(x_2(t+s))\mathrm{d}s,\qquad t\neq t_k,\\x'_2(t)=&\ r_2(t)-a_2(t)\exp(x_2(t))-b_2(t)\int_{-T}^{0}L_2(s)\exp(x_2(t+s))\mathrm{d}s-\\&c_2(t)\int_{-T}^{0}K_2(s)\exp(x_1(t+s))\mathrm{d}s,\qquad t\neq t_k,\\\Delta x_i(t_k)=&\ \ln(1+\alpha_{ik}),\qquad i=1,2,\quad k=1,2,\cdots\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

为了方便研究, 记

$$A_1(t,\boldsymbol{x}(t))=r_1(t)-a_1(t)\exp x_1(t))-$$
$$b_1(t)\int_{-T}^{0}L_1(s)\exp(x_1(t+s))\mathrm{d}s-c_1(t)\int_{-T}^{0}K_1(s)\exp(x_2(t+s))\mathrm{d}s,$$
$$A_2(t,\boldsymbol{x}(t))=r_2(t)-a_2(t)\exp(x_2(t))-$$
$$b_2(t)\int_{-T}^{0}L_2(s)\exp(x_2(t+s))\mathrm{d}s-c_2(t)\int_{-T}^{0}K_2(s)\exp(x_1(t+s))\mathrm{d}s,$$
$$B_{1k}=\ln(1+\alpha_{1k}),$$
$$B_{2k}=\ln(1+\alpha_{2k}),$$
$$\Delta x(t_k)=(\Delta x_1(t_k),\Delta x_2(t_k))^{\mathrm{T}}.\ \text{其中:}\ k=1,2,\cdots,p.$$

显然, 如果系统(4)有一个 ω-周期解$(x_1^*(t),x_2^*(t))^{\mathrm{T}}$. 那么, $(y_1^*(t),y_2^*(t))^{\mathrm{T}}=(\exp(x_1^*(t)),\exp(x_2^*(t)))^{\mathrm{T}}$ 就是系统(3)的正的 ω-周期解. 因此, 只须证明系统(4)存在一个 ω-周期解.

定义线性算子 L: $\mathrm{Dom}\ L\subset X\to N$ 为

$$\boldsymbol{x}\to(x',\Delta x(t_1),\cdots,\Delta x(t_p)),\qquad\forall\boldsymbol{x}\in\mathrm{Dom}\ L\subset X,\tag{5}$$

定义算子 N: $X\to Z$ 为

$$N\boldsymbol{x}=\left[\begin{pmatrix}A_1(t,\boldsymbol{x}(t))\\A_2(t,\boldsymbol{x}(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B_{11}\\B_{21}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}B_{1p}\\B_{2p}\end{pmatrix}\right],\qquad\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X,\tag{6}$$

又定义投影算子 P: $X\to X$ 及 Q: $Z\to Z$ 为

$$P\boldsymbol{x}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t,\qquad\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X,$$

$$Q\boldsymbol{z}=Q(\boldsymbol{x},d_1,\cdots,d_p)=\left(\frac{1}{\omega}\left(\int_0^{\omega}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}d_k\right),0,\cdots,0\right),\qquad\forall\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x},d_1,\cdots,d_p)\in Z.$$

易见, $\mathrm{Ker}\ L=\{\boldsymbol{x}\in X:\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\text{常值向量})\in\mathbf{R}^2\}$, $\mathrm{Im}\ L=\{\boldsymbol{z}:\ \boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x},d_1,\cdots,d_p)\in Z:\ \int_0^{\omega}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}d_k=0\}$ 为 Z 中的闭子集, 且 $\dim\ \mathrm{Ker}\ L=2=\mathrm{co}\dim\ \mathrm{Im}\ L$, 故 L 是指标为零的 Fredholm 映射.

P, Q 是连续投影, 使得 $\mathrm{Im}\ P=\mathrm{Ker}\ L$, $\mathrm{Im}\ L=\mathrm{Ker}\ Q=\mathrm{Im}\ (I-Q)$, $X=\mathrm{Ker}\ L\oplus\mathrm{Ker}\ P$, $Z=\mathrm{Im}\ L\oplus\mathrm{Im}\ Q$. 记 $L_p\triangleq L|_{\mathrm{Dom}\ L\cap\mathrm{Ker}\ P}$, 则 L_p: $\mathrm{Dom}\ L\cap\mathrm{Ker}\ P\to\mathrm{Im}\ L$ 是到上的一一映射. 因此, L 的广义逆映射 K_p: $\mathrm{Im}\ L\to\mathrm{Dom}\ L\cap\mathrm{Ker}\ P$ 存在, 且

$$K_p(\boldsymbol{z}(t))=\int_0\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}d_k-\frac{1}{\omega}\left[\int_0^{\omega}\int_0\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}d_k(\omega-t_k)\right].\tag{7}$$

由于

$$QN\boldsymbol{x}=\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{\omega}\left(\int_0^{\omega}A_1(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}B_{1k}\right)\\ \frac{1}{\omega}\left(\int_0^{\omega}A_2(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}B_{2k}\right)\end{pmatrix},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}\right],\qquad\forall\boldsymbol{x}\in X.\tag{8}$$

所以有

$$\begin{aligned}K_p(I-Q)N\boldsymbol{x}=&\begin{pmatrix}\int_0^{t}A_1(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}B_{1k}\\ \int_0^{t}A_2(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}B_{2k}\end{pmatrix}-\\&\begin{pmatrix}\frac{1}{\omega}\left[\int_0^{\omega}A_1(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}B_{1k}(\omega-t_k)\right]\\ \frac{1}{\omega}\left[\int_0^{\omega}A_2(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}B_{2k}(\omega-t_k)\right]\end{pmatrix}-\\&\begin{pmatrix}\left(\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^{\omega}A_1(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}B_{1k}\right)\\ \left(\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^{\omega}A_2(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}B_{2k}\right)\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{x}\in X.\end{aligned}\tag{9}$$

利用 Lebesgue 收敛定理, 可以证明 QN 和 $K_p(I-Q)N$ 是连续的, 又利用 Arzela-Ascoli 定理可以证明, 对 X 中的任意有界开子集 Ω, $QN(\overline{\Omega})$ 及 $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ 分别是 Z 及 X 中的紧子集. 因此, 对于 X 中的任意有界开子集 Ω, N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的.

对应于算子方程 $L\boldsymbol{x}=\lambda N\boldsymbol{x}$, $\lambda\in(0,1)$, 有

$$\left.\begin{aligned}x'_1(t)=&\lambda[r_1(t)-a_1(t)\exp(x_1(t))-b_1(t)\int_{-T}^{0}L_1(s)\exp(x_1(t+s))\,\mathrm{d}s-\\&c_1(t)\int_{-T}^{0}K_1(s)\exp(x_2(t+s))\,\mathrm{d}s],\qquad t\neq t_k,\\x'_2(t)=&\lambda[r_2(t)-a_2(t)\exp(x_2(t))-b_2(t)\int_{-T}^{0}L_2(s)\exp(x_2(t+s))\,\mathrm{d}s-\\&c_2(t)\int_{-T}^{0}K_2(s)\exp(x_1(t+s))\,\mathrm{d}s],\qquad t\neq t_k,\\\Delta x_i(t_k)=&\lambda\ln(1+\alpha_{ik}),\qquad i=1,2,\quad k=1,2,\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

设 $\boldsymbol{x}=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}\in X$ 是系统(10)对应于某一 $\lambda\in(0,1)$ 的解. 将式(10)从 0 到 ω 积分, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\omega}[r_1(t)-a_1(t)\exp(x_1(t))-b_1(t)\int_{-T}^{0}L_1(s)\exp(x_1(t+s))\,\mathrm{d}s-\\c_1(t)\int_{-T}^{0}K_1(s)\exp(x_2(t+s))\,\mathrm{d}s]\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k}),\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\omega}[r_2(t)-a_2(t)\exp(x_2(t))-b_2(t)\int_{-T}^{0}L_2(s)\exp(x_2(t+s))\,\mathrm{d}s-\\c_2(t)\int_{-T}^{0}K_2(s)\exp(x_1(t+s))\,\mathrm{d}s]\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k}).\end{aligned}\tag{12}$$

由式(10)~(12), 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\omega}|x'_1(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant&\int_0^{\omega}|r_1(t)-a_1(t)\exp(x_1(t))-\\&b_1(t)\int_{-T}^{0}L_1(s)\exp(x_1(t+s))\,\mathrm{d}s-c_1(t)\int_{-T}^{0}K_1(s)\exp(x_2(t+s))\,\mathrm{d}s|\,\mathrm{d}t\leqslant\\&\int_0^{\omega}[-a_2(t)\exp(x_1(t)+b_1(t)\int_{-T}^{0}L_1(s)\exp(x_1(t+s))\,\mathrm{d}s+\\&c_1(t)\int_{-T}^{0}K_1(s)\exp(x_2(t+s))\,\mathrm{d}s]\,\mathrm{d}t+\int_0^{\omega}|r_1(t)|\,\mathrm{d}t=\end{aligned}$$

$$\omega(\bar{r_1}+|\bar{r_1}|)+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k}). \tag{13}$$

同样, 可得

$$\int_0^\omega |x'_2(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \omega(\bar{r_2}+|\bar{r_2}|)+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k}). \tag{14}$$

因为 $\boldsymbol{x}=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}\in X$, 故 $\sup\limits_{t\in[0,\omega]}x_i(t)$, $\inf\limits_{t\in[0,\omega]}x_i(t)$ 存在, 并且一定存在 $\eta, \xi\in[0,\omega]$, 使得

$$x_i(\eta_i^+)=\sup_{t\in[0,\omega]}x_i(t), \qquad x_i(\eta_i^-)=\sup_{t\in[0,\omega]}x_i(t), \tag{15}$$

$$x_i(\xi_i^+)=\inf_{t\in[0,\omega]}x_i(t), \qquad x_i(\xi_i^-)=\inf_{t\in[0,\omega]}x_i(t), \qquad i=1,2. \tag{16}$$

为了方便讨论, 设式(15), (16)的第1式成立(其他情况同理可得). 由式(11), (12), (16)有

$$\int_0^\omega[a_1(t)\exp(x_1(\xi_1^+))+b_1(t)\exp(x_1(\xi_1^+))]\,\mathrm{d}t \leqslant \bar{r_1}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k}), \tag{17}$$

$$\int_0^\omega[a_2(t)\exp(x_2(\xi_2^+))+b_2(t)\exp(x_2(\xi_2^+))]\,\mathrm{d}t \leqslant \bar{r_2}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k}), \tag{18}$$

$$\int_0^\omega c_1(t)\exp(x_2(\xi_2^+))\,\mathrm{d}t \leqslant \bar{r_1}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k}), \tag{19}$$

$$\int_0^\omega c_2(t)\exp(x_1(\xi_1^+))\,\mathrm{d}t \leqslant \bar{r_2}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k}). \tag{20}$$

于是, 有

$$x_1(\xi_1^+)\leqslant \min\left\{\ln\left[\frac{\bar{r_1}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k})}{(\bar{a_1}+\bar{b_1})\omega}\right], \ln\left[\frac{\bar{r_2}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k})}{\bar{c_2}\omega}\right]\right\}=h_1,$$

$$x_2(\xi_2^+)\leqslant \min\left\{\ln\left[\frac{\bar{r_2}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k})}{(\bar{a_2}+\bar{b_2})\omega}\right], \ln\left[\frac{\bar{r_1}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k})}{\bar{c_1}\omega}\right]\right\}=h_2.$$

因此, 当 $t\in[0,\omega]$ 时, 有

$$\begin{aligned} x_1(t) &\leqslant x_1(\xi_1^+)+\int_0^\omega|x'_1(t)|\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+\alpha_{1k})|\leqslant \\ & h_1+\omega(\bar{r_1}+|\bar{r_1}|)+\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+\alpha_{1k})|+\ln(1+\alpha_{1k})]=H_1, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &\leqslant x_2(\xi_2^+)+\int_0^\omega|x'_2(t)|\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+\alpha_{2k})|\leqslant \\ & h_2+\omega(\bar{r_2}+|\bar{r_2}|)+\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+\alpha_{2k})|+\ln(1+\alpha_{2k})]=H_2. \end{aligned} \tag{22}$$

又由式(11), (12), (15)有

$$\int_0^\omega[a_1(t)\exp(x_1(\eta_1^+))+b_1(t)\exp(x_1(\eta_1^+))]\,\mathrm{d}t \geqslant \bar{r_1}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k})-\bar{c_1}\omega\exp(x_2(\eta_2^+)), \tag{23}$$

$$\int_0^\omega[a_2(t)\exp(x_2(\eta_2^+))+b_2(t)\exp(x_2(\eta_2^+))]\,\mathrm{d}t \geqslant \bar{r_2}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k})-\bar{c_2}\omega\exp(x_1(\eta_1^+)), \tag{24}$$

$$\int_0^\omega c_1(t)\exp(x_2(\eta_2^+))\,\mathrm{d}t \geqslant \bar{r_1}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k})-(\bar{a_1}+\bar{b_1})\omega\exp(x_1(\eta_1^+)), \tag{25}$$

$$\int_0^\omega c_2(t)\exp(x_1(\eta_1^+))\,\mathrm{d}t \geqslant \bar{r_2}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k})-(\bar{a_2}+\bar{b_2})\omega\exp(x_2(\eta_2^+)). \tag{26}$$

于是, 有

$$\exp(x_1(\eta_1^+))\geqslant \max\left\{\frac{\bar{r_1}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k})-\bar{c_1}\omega\exp(H_2)}{(\bar{a_1}+\bar{b_1})\omega},\right.$$

$$\left.\frac{\bar{r}_2\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k})-(\bar{a}_2+\bar{b}_2)\omega\exp(H_2)}{\bar{c}_2\omega}\right\}=H_3,$$

$$\exp(x_2(\xi_2))\geqslant\max\left\{\frac{\bar{r}_2\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k})-\bar{c}_2\omega\exp(H_1)}{(\bar{a}_2+\bar{b}_2)\omega},\right.$$

$$\left.\frac{\bar{r}_1\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k})-(\bar{a}_1+\bar{b}_1)\omega\exp(H_1)}{\bar{c}_1\omega}\right\}=H_4.$$

因此，当 $t\in[0,\omega]$ 时，有

$$x_1(t)\geqslant x_1(\xi_1)-\int_0^\omega|x'_1(t)|\,\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+\alpha_{1k})|\geqslant$$

$$\ln H_3-\omega(\bar{r}_1+|\bar{r}_1|)-\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+\alpha_{1k})|+\ln(1+\alpha_{1k})]=:H_5,\tag{27}$$

$$x_2(t)\geqslant x_2(\xi_2)-\int_0^\omega|x'_2(t)|\,\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+\alpha_{2k})|\geqslant$$

$$\ln H_4-\omega(\bar{r}_2+|\bar{r}_2|)-\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+\alpha_{2k})|+\ln(1+\alpha_{2k})]=:H_6.\tag{28}$$

令 $H=1+\sum_{k=1}^{6}|H_k|$，由式(21)，(22)，(27)，(28)的讨论可知，$\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$. 显然，正常数 H 与 $\lambda(\lambda\in(0,1))$ 是无关的. 由于代数方程组

$$\begin{cases}(\bar{a}_1+\bar{b}_1)\omega u_1+\bar{c}_1\omega u_2=\bar{r}_1\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{1k}),\\[2ex](\bar{a}_2+\bar{b}_2)\omega u_2+\bar{c}_2\omega u_1=\bar{r}_2\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+\alpha_{2k})\end{cases}$$

有唯一正解 $(u_1^*,u_2^*)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{2+}$. 记 $M=H+C$，其中 C 充分大，使得 $\|\ln u_1^*,\ln u_2^*\|<C$. 令 $\Omega=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X:\ \|\boldsymbol{x}\|<M\}$，则 Ω 满足引理 1 中的条件(1). 当 $\boldsymbol{x}\in\operatorname{Ker}L\cap\partial\Omega$ 时，$\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的常值向量且 $\|\boldsymbol{x}\|=M$. 于是，有

$$QN\boldsymbol{x}=\left[\begin{pmatrix}\bar{r}_1-\bar{a}_1\exp(x_1)-\bar{b}_1\exp(x_1)-\bar{c}_1\exp(x_2)+\dfrac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}B_{1k}\\[2ex]\bar{r}_2-\bar{a}_2\exp(x_2)-\bar{b}_2\exp(x_2)-\bar{c}_2\exp(x_1)+\dfrac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}B_{2k}\end{pmatrix},\boldsymbol{0},\ \cdots,\boldsymbol{0}\right]\neq\boldsymbol{0}.$$

即引理 1 中的条件(2)也被满足. 取 $J:\ \to\operatorname{Im}Q\to X:(f,0,\cdots,0)\to f$，则当 $\boldsymbol{x}\in\operatorname{Ker}L\cap\partial\Omega$ 时，有

$$JQN\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\bar{r}_1-\bar{a}_1\exp(x_1)-\bar{b}_1\exp(x_1)-\bar{c}_1\exp(x_2)+\dfrac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}B_{1k}\\[2ex]\bar{r}_2-\bar{a}_2\exp(x_2)-\bar{b}_2\exp(x_2)-\bar{c}_2\exp(x_1)+\dfrac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}B_{2k}\end{pmatrix}.$$

经计算，并由定理条件可得 $\deg\{JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,\boldsymbol{0}\}\neq0$，从而引理 1 中的条件(3)也满足. 因此，系统(4)至少有一个 ω-周期解，系统(3)至少存在一个正的 ω-周期解.

3　应用

考虑文[2-3]中研究的系统(1)与(2)的正周期解存在性问题. 由定理 1 可得

定理 2　若系统(1)中的系数函数满足

$$\max\left\{\bar{r}_1-\bar{c}_1\exp\left(\max\left\{\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2},\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{c}_1}\right\}+(\bar{r}_2+|\bar{a}_2|)\omega\right),\right.$$

$$\left.\bar{r}_2-\bar{a}_2\exp\left(\max\left\{\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2},\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{c}_1}\right\}+(\bar{r}_2+|\bar{a}_2|)\omega\right)\right\}>0;$$

$$\max\left\{\bar{r}_2 - \bar{c}_2 \exp\left(\max\left\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1}, \ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{c}_2}\right\} + (\bar{r}_1 + |\bar{a}_1|)\omega\right),\right.$$

$$\left.\bar{r}_1 - \bar{a}_1 \exp\left(\max\left\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1}, \ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{c}_2}\right\} + (\bar{r}_1 + |\bar{a}_1|)\omega\right)\right\} > 0,$$

方程组$\begin{cases}\bar{a}_1 u_1 + \bar{c}_1 u_2 = \bar{r}_1\\ \bar{a}_2 u_2 + \bar{c}_2 u_1 = \bar{r}_2\end{cases}$有唯一正解$(u_1^*, u_2^*)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{2+}$，则系统(1)至少存在一个正周期解.

定理 3 若系统(2)中的系数函数满足

$$\max\left\{\bar{r}_1 - \bar{c}_1 \exp\left(\max\left\{\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2 + \bar{b}_2}, \ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{c}_1}\right\} + (\bar{r}_2 + |\bar{a}_2|)\omega\right),\right.$$

$$\left.\bar{r}_2 - (\bar{a}_2 + \bar{b}_2)\exp\left(\max\left\{\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2 + \bar{b}_2}, \ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{c}_1}\right\} + (\bar{r}_2 + |\bar{a}_2|)\omega\right)\right\} > 0;$$

$$\max\left\{\bar{r}_2 - \bar{c}_2 \exp\left(\max\left\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}, \ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{c}_2}\right\} + (\bar{r}_1 + |\bar{a}_1|)\omega\right),\right.$$

$$\left.\bar{r}_1 - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1)\exp\left(\max\left\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}, \ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{c}_2}\right\} + (\bar{r}_1 + |\bar{a}_1|)\omega\right)\right\} > 0,$$

方程组$\begin{cases}(\bar{a}_1 + \bar{b}_1)u_1 + \bar{c}_1 u_2 = \bar{r}_1\\ (\bar{a}_2 + \bar{b}_2)u_2 + \bar{c}_2 u_1 = \bar{r}_2\end{cases}$有唯一正解$(u_1^*, u_2^*)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{2+}$，则系统(2)至少存在一个 ω 正周期解.

易见，定理 2, 3 的结果与文[2-3]中的主要结果是不相同的，不被文[2-3]中的主要结果所包括.

参考文献:

[1] WANG W, MA Z. Harmless delays for uniform persistence[J]. J Math Anal Appl, 1991, 158: 256-268.

[2] LI Y, XU G. Periodic solutions for a distributed delay competition model[J]. Appl Anal, 2001, 78: 55-61.

[3] LI Xian-yi, ZHU De-ming. Global existence of positive periodic solutions for a distributed delay competition model [J]. Acta Math Appl Sini, 2003, 19(3): 491-498.

[4] SAITO Y. Permanence and global stability for general Lotka-Volterra predator prey systems with distributed delays [J]. Nonlinear Anal, 2001, 47: 6157-6168.

[5] 汪东树, 王全义. 一类具时滞和比率的扩散系统正周期解[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2006, 27(4): 358-361.

[6] GAINES R E, MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977: 40-60.

Positive Periodic Solutions of a Lotka-Volterra Competition System with Impulses and Delays

WANG Dong-shu, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, a Lotka-Volterra competition system with impulses and delays is investigated. By means of coincidence degree theory and some analysis techniques, we obtain a new result on the existence of positive periodic solutions to the system, which shows that impact of impulsive effects on existence of positive periodic to the system.

Keywords: delay; impulse; positive periodic solution; coincidence degree theory

(责任编辑：陈志贤 英文审校：张金顺，黄心中)