文章编号: 1000-5013(2010)05-0586-04

单叶调和函数及其反函数为调和拟共形的充要条件

胡春英, 黄心中

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究平面上具有形式 $f(z)=A[\alpha z+\beta+\log(1-\exp(-\alpha z-\beta))-\overline{\log(1-\exp(-\alpha z-\beta))}]+B$ 的保向单叶调和映照, 其中 A, B, α, β 是常数且满足条件 $A\neq 0, \alpha\neq 0$. 给出了定义在椭圆和上半平面上的单叶调和函数及其反函数都是调和拟共形映照的充要条件, 并推广到一般的单连通区域上.

关键词: 单叶调和函数; 拟共形映照; 复特征; 调和拟共形映照

中图分类号: O 174.51 文献标识码: A

1 预备知识

一个复值函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在平面区域 D 上调和是指 u, v 在区域 D 上实调和. 如果 D 是一个单连通区域, 则 f 可写为 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$, 其中 h, g 为解析函数. Lewy[1] 给出了 f 局部单叶且保向的充要条件为 $J_f=|h'|^2-|g'|^2>0, z\in D$. 文[2]证明了如下定理.

定理A 假设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是一个单连通区域 D 上的保向单叶调和映照, 则其反函数 $z=f^{-1}(w)$ 在 $G=f(D)$ 内调和当且仅当下列3种情形之一成立: (Ⅰ) $f(z)$ 在 D 内共形; (Ⅱ) $f(z)$ 是仿射变换, 即 $f(z)=\alpha z+\beta\bar{z}+B, |\alpha|>|\beta|>0$; (Ⅲ) $f(z)$ 具有形式为

$$f(z)=A[\alpha z+\beta+\log(1-\exp(-\alpha z-\beta))-\overline{\log(1-\exp(-\alpha z-\beta))}]+B. \tag{1}$$

式(1)中: A, B, α, β 是常数且满足条件 $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>0, z\in D$.

单叶调和函数何时为单叶调和拟共形映照是一个研究热点. Pavlović[3-4] 研究了单位圆和上半平面上的单叶调和函数为拟共形映照的条件, 文[5]中也给出了单位圆到自身上的调和同胚为调和拟共形同胚的条件. 本文研究单叶调和映照及其反函数都是调和拟共形映照的条件. 定理A的结果表明, 只需对具有形式(1)的情形加以研究.

2 主要结果和证明

设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是一个单连通区域 D 上的保向单叶调和映照, 且具有(1)式形式, 其中 A, B, α, β 是常数且满足条件 $A\neq 0, \alpha\neq 0$. 这里

$$\left.\begin{aligned} h(z)&=A[\alpha z+\beta+\log(1-\exp(-\alpha z-\beta))]+B,\\ g(z)&=-\bar{A}\log(1-\exp(-\alpha z-\beta)). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

设 $z=x+\mathrm{i}y, \alpha=\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2, \beta=\beta_1+\mathrm{i}\beta_2$, 其中 $x, y, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 为实数, 可得 $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)=\alpha_1x-\alpha_2y+\beta_1$. 此方程表示一空间平面, 且与 xoy 平面相交.

定理1 设 f 是定义在椭圆 $U=\{z=x+\mathrm{i}y \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\}$ 上的保向单叶调和映照, 且具有式(1)的形式, 则 f 的反函数是调和拟共形映照的充要条件, 存在一个实常数 $c>0$, 使得 $\beta_1\geqslant\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}+c$.

收稿日期: 2009-05-21

通信作者: 胡春英(1979-), 男, 讲师, 主要从事函数论的研究. E-mail: huchunying@sina.com.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2008J0195); 华侨大学科研基金资助项目(09HZR23)

证明　当 $z\in U$ 时, 平面 $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)=\alpha_1 x-\alpha_2 y+\beta_1$ 的最大值和最小值必在边界 ∂U 上取到.

下面求函数 $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)=\alpha_1 x-\alpha_2 y+\beta_1$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 下的最小值. 由拉格朗日乘数法, 设

$$L(x,y)=\alpha_1 x-\alpha_2 y+\beta_1+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),\qquad \lambda\in\mathbf{R},$$

则有 $L_x=\alpha_1+\frac{2\lambda}{a^2}x=0$, $L_y=-\alpha_2+\frac{2\lambda}{b^2}y=0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 由此可解得

$$\begin{cases} x=-\dfrac{a^2\alpha_1}{\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}}, & y=\dfrac{b^2\alpha_2}{\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}}; \\ x=\dfrac{a^2\alpha_1}{\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}}, & y=-\dfrac{b^2\alpha_2}{\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}}. \end{cases}$$

最后, 可得到

$$\min_{z\in\partial U}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)=\beta_1-\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}.\tag{3}$$

充分性的证明: 若存在一个实常数 $c>0$, 使得 $\beta_1\geqslant\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}+c$, 则有

$$\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>\min_{z\in U}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)=\min_{z\in\partial U}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)=$$
$$\beta_1-\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}\geqslant c>0,\qquad z\in U,$$

从而有

$$\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|=\exp(-\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))\leqslant\exp(-c)<1,\qquad 0<\exp(-c)<1,\quad z\in U.\tag{4}$$

由定理 A 及拟共形映照的性质可知, 函数 f 及其反函数都是调和拟共形映照.

必要性的证明: 若 f 具有式(1)的形式, 且 f 的反函数是调和拟共形映照, 那么 f 也一定是调和拟共形映照. 设 f 的复特征为 $\mu(z)$, 则有

$$\|\mu(z)\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{z\in U}|\mu(z)|=\max_{z\in\partial U}\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|=$$
$$\max_{z\in\partial U}[\exp(-\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))]=\exp(-\min_{z\in\partial U}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))=$$
$$\exp(-(\beta_1-\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}))\leqslant k<1,\qquad 0<k<1.\tag{5}$$

由此可得 $\beta_1-\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}\geqslant-\log k$. 取 $c=-\log k>0$, 则有 $\beta_1\geqslant\sqrt{a^2\alpha_1^2+b^2\alpha_2^2}+c$.

定理 2　设 f 是定义在上半平面 $H=\{z\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ 上的保向单叶调和映照, 且具有式(1)的形式, 则 f 的反函数是调和拟共形映照的充要条件, 存在一个实常数 $c>0$, 使得 $\beta_1\geqslant c$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2<0$.

充分性的证明: 当 $z\in H$ 时, 若存在一个实常数 $c>0$, 使得 $\beta_1\geqslant c$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2<0$, 则有

$$\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)=-\alpha_2 y+\beta_1>\beta_1\geqslant c,\qquad z\in H.\tag{6}$$

即有

$$\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|=\exp(-\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))\leqslant\exp(-c)<1,\qquad 0<\exp(-c)<1,\quad z\in H.$$

由定理 A 及拟共形映照的性质可知, 函数 f 及其反函数都是调和拟共形映照.

必要性的证明: 因 f 的反函数调和, 由定理 A 有

$$\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>c,\qquad z\in H.$$

从而得到 $\alpha_1=0$, $\alpha_2<0$, 并且 $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)$ 在边界 ∂H 上取到最小值 β_1. 即

$$\min_{z\in H}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)=\min_{z\in\partial H}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)=\beta_1,\qquad z\in H.\tag{7}$$

设 f 的复特征为 $\mu(z)$, 则有

$$\|\mu(z)\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{z\in H}|\mu(z)|=\max_{z\in\partial H}\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|=$$
$$\max_{z\in\partial H}[\exp(-\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))]=\exp(-\min_{z\in\partial H}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))=$$
$$\exp(-\beta_1)\leqslant k<1,\qquad 0<k<1.\tag{8}$$

由此可得, $\beta_1\geqslant-\log k$. 取 $c=-\log k>0$, 则有 $\beta_1\geqslant c$.

3 一般区域上的情形

定理3 设 D 为有界单连通开区域, 其边界为 ∂D: $\varphi(x,y)=0$, 且 $\varphi\in C^1$. f 是定义在 D 上的保向单叶调和映照, 且具有式(1)的形式, 则 f 的反函数是调和拟共形映照的充要条件, 存在一个实常数 $c>0$, 使得对任何满足方程

$$\alpha_1\varphi_y+\alpha_2\varphi_x=0,\qquad \varphi(x,y)=0$$

的 z^*, 有 $\mathrm{Re}(\alpha z^*+\beta)\geqslant c$.

证明 因 D 为有界单连通开区域, 则 $\overline{D}$ 为有界单连通闭区域, 所以 $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)$ 必在边界 ∂D 上取到最小值. 由拉格朗日乘数法, 设

$$L(x,y)=\alpha_1x-\alpha_2y+\beta_1+\lambda\varphi(x,y),\qquad \lambda\in\mathbf{R},$$

则有 $L_x=\alpha_1+\lambda\varphi_x=0$, $L_y=-\alpha_2+\lambda\varphi_y=0$, $\varphi(x,y)=0$. 等价于

$$\alpha_1\varphi_y+\alpha_2\varphi_x=0,\qquad \varphi(x,y)=0. \tag{9}$$

充分性的证明: 因为 z^* 满足方程组(9), 所以 z^* 是边界上的极值点, 由 $\mathrm{Re}(\alpha z^*+\beta)\geqslant c>0$, 显然有

$$\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant c>0$$

又因为 $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)$ 在边界 ∂D 上取到最小值, 所以有

$$\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant c>0,\qquad z\in D.$$

即有

$$\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|=\exp(-\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))\leqslant\exp(-c)<1,\qquad 0<\exp(-c)<1,\quad z\in D.$$

由定理A及拟共形映照的性质可知, 函数 f 及其反函数都是调和拟共形映照.

必要性的证明: 若 f 具有式(1)的形式, 且 f 的反函数是调和拟共形映照, 那么 f 也一定是调和拟共形映照. 设 f 的复特征为 $\mu(z)$, 则有

$$\|\mu(z)\|_\infty=\operatorname{ess}\sup_{z\in D}|\mu(z)|=$$

$$\max_{z\in\partial D}\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|=\max_{z\in\partial D}[\exp(-\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))]=$$

$$\exp(\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))\leqslant k<1,\qquad 0<k<1.$$

由此可得, $\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant-\log k$. 取 $c=-\log k>0$, 则有 $\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant c$, 从而有

$$\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant c,\qquad z\in\partial D.$$

又因为满足方程组(9)的点 $z^*\in\partial D$, 所以有 $\mathrm{Re}(\alpha z^*+\beta)\geqslant c$.

当 D 为无界单连通开区域时, 类似于定理3的证明可得到如下定理.

定理4 设 D 为无界单连通开区域, 其边界为 ∂D: $\varphi(x,y)=0$, 且 $\varphi\in C^1$. f 是定义在 D 上的保向单叶调和映照, 且具有式(1)的形式, 则 f 的反函数是调和拟共形映照的充要条件, 存在一个实常数 $c>0$, 使得 α,β 满足以下两个条件.

(1) 对任何满足方程

$$\alpha_1\varphi_y+\alpha_2\varphi_x=0,\qquad \varphi(x,y)=0$$

的 z^*, 有 $\mathrm{Re}(\alpha z^*+\beta)\geqslant c$.

(2) $\lim_{z\to\infty}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant 0$, $z\in D$.

充分性的证明: 因 D 为无界单连通开区域, 由条件(2)可知, $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)$ 必在边界 ∂D 上取到最小值. 又因为对任何满足方程组(9)的 z^*, 都有 $\mathrm{Re}(\alpha z^*+\beta)\geqslant c>0$, 则显然有

$$\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant c>0,\qquad z\in D.$$

即有

$$\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|=\exp(-\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))\leqslant\exp(-c)<1,\qquad 0<\exp(-c)<1,\quad z\in D.$$

由定理A及拟共形映照的性质知, 函数 f 及其反函数都是调和拟共形映照.

必要性的证明: 因 f 的反函数调和, 由定理 A 可知

$$\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)>0,\qquad z\in D.$$

显然有

$$\lim_{z\to\infty}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant 0,\qquad z\in D,$$

且 $\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)$ 在边界 ∂D 上取到最小值. 设 f 的复特征为 $\mu(z)$, 则有

$$\|\mu(z)\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{z\in D}|\mu(z)|=$$

$$\max_{z\in\partial D}\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|=\max_{z\in\partial D}[\exp(-\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))]=$$

$$\exp(-\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta))\leqslant k<1,\qquad 0<k<1.$$

由此可得, $\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant-\log k$. 取 $c=-\log k>0$, 有 $\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant c$, 从而有

$$\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant\min_{z\in\partial D}\mathrm{Re}(\alpha z+\beta)\geqslant c,\qquad z\in\partial D.$$

又因为满足方程组(9)的点 $z^*\in\partial D$, 所以有 $\mathrm{Re}(\alpha z^*+\beta)\geqslant c$.

在上述 4 个定理中, 若令 $c=0$, 则可得到函数 f 及其反函数都是调和映照的充要条件.

参考文献:

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1936, 42(10): 689-692.

[2] 张兆功, 刘礼泉. 单叶调和映照的反函数[J]. 数学进展, 1996, 25(3): 270-276.

[3] PAVLOVIĆ M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2002, 27(2): 365-372.

[4] KALAJ D, Pavlović M. Boundary correspondence under quasiconformal harmonic diffeomorphisms of a half-plane[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2005, 30(1): 159-165.

[5] 黄心中. 单位圆盘上的调和拟共形同胚[J]. 数学年刊: A 辑, 2008, 29(4): 519-524.

Necessary and Sufficient Condition that Univalent Harmonic Functions and Their Inverse Functions are Harmonic Quasiconformal Mappings

HU Chun-ying, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Plannar sense-preserving univalent harmonic functions with the form $f(z)=A[\alpha z+\beta+\log(1-\exp(-\alpha z-\beta))-\overline{\log(1-\exp(-\alpha z-\beta))}]+B$, are considered, where A, B, α, β are constants with the condition $A\neq 0$, $\alpha\neq 0$. Necessary and sufficient condition for such harmonic functions defined elliptic domain or on the upper half plane and their inverse functions to be harmonic quasiconformal mappings are obtained. Our methods also can be applied to the general simply connect domains.

Keywords: univalent harmonic functions; quasiconformal mappings; complex dilatation; harmonic quasiconformal mappings

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)