

文章编号: 1000 5013( 2010) 05- 0570- 06

# 一种将线性粘弹微分型本构方程 应用到 ABAQUS 的方法

潘晓明<sup>1</sup>, 余俊<sup>2</sup>, 杨钊<sup>1</sup>, 孔娟<sup>1</sup>

( 1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092;

2. 中南大学 土木建筑学院, 湖南 长沙 410075)

摘要: 以 3 参量 Merchant 模型、Poyning-Thomson 模型, 以及 4 参量 Burger 模型为例, 推导 3 种常用微分型本构方程的松弛剪切模量 Prony 级数形式, 并确定其在 ABAQUS 中的输入参数, 供 ABAQUS 调用分析. 以算例分析岩土流变特性, 将 3 种模型的应变蠕变、松弛数值解与一维情形下的解析解进行对比, 结果吻合较好. 对土体采用 Merchant 粘弹性流变模型的过江盾构隧道进行粘弹性数值分析, 得到管片位移均趋于稳定值, 说明所提出的方法是正确和可靠的, 可以应用于岩土工程数值计算.

关键词: 微分型本构; Laplace 变换; Prony 级数; 蠕变; 松弛; ABAQUS

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

对于岩土所呈现的各种不同的流变特性, 一般采用 3 种方法进行描述. (1) 通过室内或现场试验和实测<sup>[1-3]</sup>, 建立经验流变或蠕变公式; (2) 建立积分型本构方程求解流变问题<sup>[4-6]</sup>; (3) 根据流变介质模型, 建立微分型本构方程, 对岩土体流变进行分析. 第 3 种方法直观、形象, 且便于有限元编程计算, 因而得到广泛的应用<sup>[7-9]</sup>. ABAQUS 是目前国际上最为先进的大型通用有限元计算分析软件之一. 它所提供的粘弹本构模型是基于松弛剪切模量 Prony 级数形式的积分型本构方程<sup>[10]</sup>, 这给传统岩土体线性粘弹微分型本构方程的应用带来了不便. 本文研究一种将线性粘弹性微分型本构方程转化成松弛剪切模量的 Prony 级数形式的方法, 以供 ABAQUS 调用分析.

## 1 线性粘弹微分型本构方程转换成 Prony 级数形式

岩土流变模型是以反映蠕变、应力松弛等为前提, 利用弹性元件( 胡克体)、粘性元件( 牛顿体), 通过串并联关系形成的各种流变模型. 文中讨论的 3 参量 Merchant 模型、Poyning-Thomson 模型, 以及 4 参量 Burger 模型, 分别如图 1 所示.

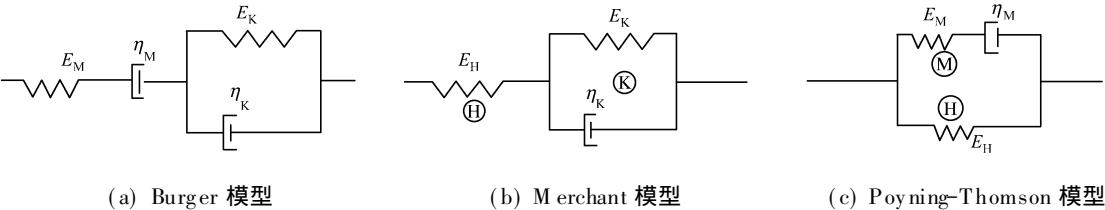


图 1 流变模型

Fig. 1 Rheological model

### 1.1 微分型本构方程的 Laplace 变换<sup>[11-12]</sup>

线性粘弹性微分型本构关系可以表示为

收稿日期: 2009 10 11

通信作者: 潘晓明( 1979- ), 男, 博士研究生, 主要从事隧道及地下结构方面的研究. E-mail: pxm155138@ 163. com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目( 40872179); 中国博士后科研基金资助项目( 20080440652)

$$\sum_{k=0}^m p_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^n q_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k}, \quad n \geq m. \quad (1)$$

令  $P = \sum_{k=0}^m p_k \frac{d^k \sigma}{dt^k}$ ,  $Q = \sum_{k=0}^n q_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k}$ , 对式(1)进行 Laplace 变换, 可得

$$P(s) \bar{\sigma} = Q(s) \bar{\varepsilon} \quad (2)$$

为求松弛弹性模量, 对恒定的应变  $\varepsilon = \varepsilon_0$  进行 Laplace 变换, 则式(2)可转换为

$$\bar{Y}(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{s \cdot \bar{P}(s)}. \quad (3)$$

## 1.2 Burger 模型

Burger 模型是由 Maxwell 体和 Kelvin 体串联而成(图 1a), 其一维本构关系为

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} = q_1 \varepsilon + q_2 \dot{\varepsilon} \quad (4)$$

当以弹性模量表示时, 有

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\eta_M E_M + \eta_M E_K + \eta_K E_M}{E_M E_K}, & p_2 &= \frac{\eta_M \eta_K}{E_M E_K}, \\ q_1 &= \eta_M, & q_2 &= \frac{\eta_M \eta_K}{E_K}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

当以剪切模量表示三维形式时, 则有

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\eta_M G_M + \eta_M G_K + \eta_K G_M}{G_M G_K}, & p_2 &= \frac{\eta_M \eta_K}{G_M G_K}, \\ q_1 &= 2\eta_M, & q_2 &= 2 \frac{\eta_M \eta_K}{G_K}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} G_M &= \frac{E_M}{2(1 + \mu_M)}, & G_K &= \frac{E_K}{2(1 + \mu_K)}, \\ \eta_M &= \frac{\eta_M}{2(1 + \mu_M)}, & \eta_K &= \frac{\eta_K}{2(1 + \mu_K)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

不考虑材料粘弹性体积变形时,  $\mu_K = \mu_M = \mu = 0.5$  对式(4)进行 Laplace 变换, 可得松弛剪切模量为

$$\bar{Y}(s) = \frac{q_1 s + q_2 s^2}{s(1 + p_1 s + p_2 s^2)} = \frac{1}{p_2} \left\{ \left[ \frac{q_1}{(s + \alpha)(\beta - \alpha)} + \frac{q_1}{(s + \beta)(\beta - \alpha)} \right] + \left[ \frac{q_2 \alpha}{(s + \alpha)(\alpha - \beta)} + \frac{q_2 \beta}{(s + \beta)(\beta - \alpha)} \right] \right\}. \quad (8)$$

式(8)中:  $\alpha = \frac{p_1 \mp \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2p_2}$ . 对式(8)进行 Laplace 逆变换, 可得

$$Y(t) = \frac{q_2}{p_2(\alpha - \beta)} \left[ (\alpha - \frac{q_1}{q_2}) \cdot \exp(-\alpha t) + (\frac{q_1}{q_2} - \beta) \cdot \exp(-\beta t) \right]. \quad (9)$$

将式(7)带入式(9), 可得松弛剪切模量为

$$G(t) = \frac{G_M}{(\alpha - \beta)} \left[ (\frac{G_K}{\eta_K} - \beta) \cdot \exp(-\beta t) + (\alpha - \frac{G_K}{\eta_K}) \cdot \exp(-\alpha t) \right]. \quad (10)$$

松弛剪切模量可以表示为 Prony 级数的形式, 即

$$G(t) = G_\infty + \sum_{i=1}^n G_i \cdot \exp(-t/\tau_i). \quad (11)$$

比较式(10), (11), 并进行归一化处理, 可得

$$G(t) = G_0 \cdot [g_1 \cdot \exp(-t/\tau_1) + g_2 \cdot \exp(-t/\tau_2)]. \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} G_\infty &= 0, & G_0 &= G_M, \\ g_1 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)} (\frac{G_K}{\eta_K} - \beta), & g_2 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)} (\alpha - \frac{G_K}{\eta_K}), \\ \tau_1 &= \frac{1}{\beta}, & \tau_2 &= \frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

以上参数  $E_M$ ,  $\mu_M$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  就是 Burger 模型在 ABAQUS 中的输入参数.

### 1.3 Merchant 模型

Merchant 模型的一维本构方程为

$$\sigma + \frac{\eta_k}{E_H + E_K} \dot{\sigma} = \frac{E_H E_K}{E_H + E_K} \varepsilon + \frac{\eta_k E_H}{E_H + E_K} \dot{\varepsilon} \quad (14)$$

通过同样的方法, 可得到 Merchant 模型在 ABAQUS 中的输入参数为

$$G_0 = G_H, \quad g_1 = \frac{G_H}{G_H + G_K}, \quad \tau_1 = \frac{\eta_k}{G_H + G_K}. \quad (15)$$

### 1.4 Poyning-Thomson 模型

Poyning-Thomson 模型的一维本构方程为

$$\sigma + \frac{\eta_M}{E_M} \dot{\sigma} = E_H \varepsilon + \frac{\eta_M (E_H + E_M)}{E_M} \dot{\varepsilon} \quad (16)$$

通过同样的方法, 可得到 Poyning-Thomson 模型在 ABAQUS 中的输入参数为

$$G_0 = G_H + G_M, \quad g_1 = \frac{G_M}{G_H + G_M}, \quad \tau_1 = \frac{\eta_M}{G_M} \quad (17)$$

## 2 算例验证

验证算例为一个三维 C3D8 单元试件, 如图 2 所示. 件长、宽、高均为 1 m, 试件底部固定, 顶部受均布压力  $p$  进行蠕变试验数值模拟, 以及施加恒定位移进行松弛试验数值模拟. 材料基本参数:  $E_H$  为 2.0 MPa, 泊松比  $\mu$  为 0.25,  $E_M$  为 2.0 MPa,  $\eta_M$  为 21.6 MPa·月,  $E_K$  为 2.0 MPa,  $\eta_k$  为 21.6 MPa·月.

通过式(13)~(17), 将微分型本构 Burger 模型、Merchant 模型及 Poyning-Thomson 模型参数转换为可供 ABAQUS 调用的输入参数.

(1) Burger 模型的一维蠕变和一维松弛解析解为

$$\varepsilon(t) = \left[ \frac{1}{E_M} + \frac{1}{\eta_M} + \frac{1}{E_K} (1 - \exp(-\frac{E_K}{\eta_k} t)) \right] \sigma_0,$$

$$\sigma(t) = \frac{q^2}{p^2(\alpha - \beta)} \left[ (\alpha - \frac{q_1}{q^2}) \cdot \exp(-\alpha t) + (\frac{q_1}{q^2} - \beta) \cdot \exp(-\beta t) \right] \cdot \sigma_0.$$

由此可以得到 Burger 模型在 ABAQUS 中的输入参数:  $E_0 = E_M = 2.0$  MPa,  $\mu_0 = \mu_M = 0.25$ ,  $g_1 = 0.768$ ,  $g_2 = 0.231$ ,  $\tau_1 = 3.59$ ,  $\tau_2 = 27.0$

(2) Merchant 模型的一维蠕变和一维松弛解析解为

$$\varepsilon(t) = \left[ \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} (1 - \exp(-\frac{E_K}{\eta_k} t)) \right] \sigma_0,$$

$$\sigma(t) = \left[ E_H + \frac{E_H E_K}{E_H + E_K} (1 - \exp(-\frac{E_H + E_K}{\eta_k} t)) \right] \cdot \sigma_0.$$

由此可以得到 Merchant 模型在 ABAQUS 中的输入参数:  $E_0 = E_H = 2.0$  MPa,  $\mu_0 = \mu_H = 0.25$ ,  $g_1 = 0.5454545$ ,  $\tau_1 = 4.91$

(3) Poyning-Thomson 模型的一维蠕变和一维松弛解析解为

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_H} \left[ 1 - \frac{E_M}{E_M + E_H} \exp(-\frac{E_M E_H}{(E_M + E_H) \eta_M} t) \right] \sigma_0,$$

$$\sigma(t) = \left[ E_H + E_M \cdot \exp(-\frac{E_M}{\eta_M} t) \right] \cdot \sigma_0.$$

由此可得到 Poyning-Thomson 模型在 ABAQUS 中的输入参数, 即  $E_0 = E_H + E_M = 4.0$  MPa,  $\mu_0 = \mu_H = 0.25$ ,  $g_1 = 0.45454545$ ,  $\tau_1 = 10.8$ .

在 ABAQUS 中, 应力以受压为负, 受拉为正. 在施加荷载的中, 均布荷载  $p$  为 0.1 MPa, 进行蠕变数值试验; 恒定位移  $u_3$  为 0.3 m, 进行松弛数值试验.

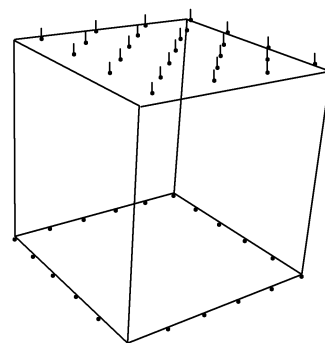


图 2 三维计算模型

Fig. 2 Three dimensional computational model

对于流变计算, 在 ABAQUS 中一般设置两个分析步. 第 1 个分析步为 Static 静力分析步, 时间设置很小, 如  $1 \times 10^{-20}$  s; 第 2 个分析步为 Visco 准静态分析步, 采用固定时间增量步为 0.5 月, 计算总时间为 150 月.

在均布荷载作用下, Burger 模型、Merchant 模型及 Poyning-Thomson 模型的应变蠕变数值解与一维情形下蠕变解析解, 如图 3 所示. 从图 3 可知, Burger 模型能够较好地模拟蠕变的第 2 阶段, 其轴向应变  $\varepsilon$  随时间  $(t)$  的增加而增加; Merchant 模型和 Poyning-Thomson 模型能够较好地模拟蠕变的第 1 阶段, 轴向应变随时间的增加而趋于稳定值.

在常应变作用下, 3 种模型应力  $\sigma$  松弛数值解与一维松弛解析解, 如图 4 所示. 从图 4 可知, Buger 模型存在应力松弛, 随着时间的增加最终趋于零; Merchant 模型和 Poyning-Thomson 模型具有松弛特性, 随时间的增加最终趋于稳定值.

从图 3, 4 可以看出, 3 种模型的蠕变及松弛的解析解与数值解吻合较好, 蠕变最大相对误差不超过 1.34%, 松弛最大误差不超过 1.28%.

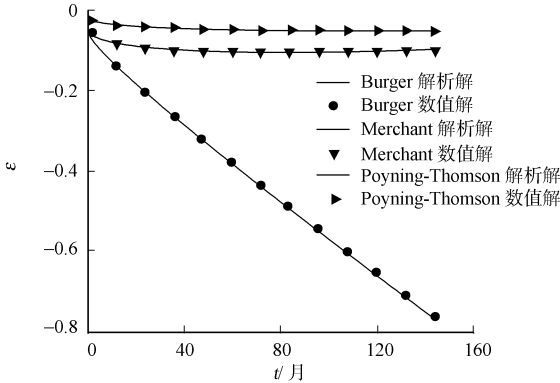


图 3 模型轴向应变解析解与数值解比较  
Fig. 3 Comparison between analytical and numerical axial strains

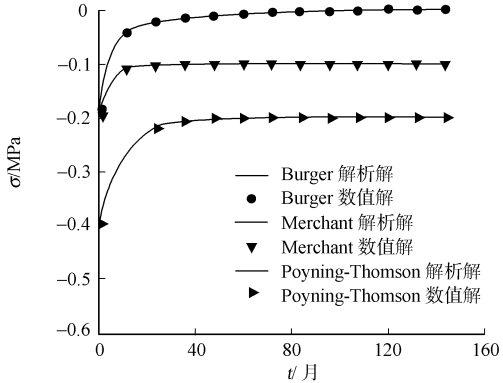


图 4 模型轴向应力解析解与数值解比较  
Fig. 4 Comparison between analytical and numerical axial stresses

3 工程实例

某过江隧道衬砌外径为 8.7 m, 管片内直径为 7.9 m, 管片厚为 400 mm; 有限元模型尺寸长 60 m, 宽 79.38 m, 拱顶埋深 17.6 m, 其网格图如图 5 所示. 坐标系采用水平向右为  $X$  方向, 垂直向上为  $Y$  方向. 底部边界全约束边界条件, 左、右侧边界则采用  $X$  轴方向对称约束, 上部边界采用自由边界.

土体单元选用双线性四边形完全积分单元, 单元数 5 275 个, 节点数 5 525 个. 管片采用实体单元, 选用能考虑弯曲并可克服剪切自锁的四边形双线性非协调等参单元. 管片单元数 168 个, 节点数 252 个. 土体采用 Merchant 本构模型, 试验参数和经转化为 ABAQUS 的粘弹输入参数, 如表 1 所示.

隧洞中心处的外水压力为 0.367 4 MPa, 拱顶至拱底的侧向水压力呈梯形分布. 对砂性土采用水土分算, 外水压力直接作用在管片衬砌外层周围. 计算时设置 4 个分析步: (1) 设置 Geostatic 重力分析步. 计算后将土体位移场清零, 只保留应力场; (2) 设置为 Static 静力分析步. 开挖隧道范围内土体并施加管片, 计算时间为  $1 \times 10^{-20}$  s; (3) 设置为 Visco 准静态分析步. 施加管片重力及外水压, 计算时间为 36 月, 时间增量为 0.5 月.

在第 3 个分析步开始时, 管片在施加重力荷载及施加外水压作用下, 瞬时产生的弹性变形如图 6 所示. 从图 6 可知, 由于管片接头位置不对称, 造成水平位移不对称. 在土体采用粘弹材料, 计算时间为 36 月时, 管片的位移云图如图 7 所示. 从图 7 可知, 管片水平相对位移由 24.1 mm 变化为 17.8 mm; 管片

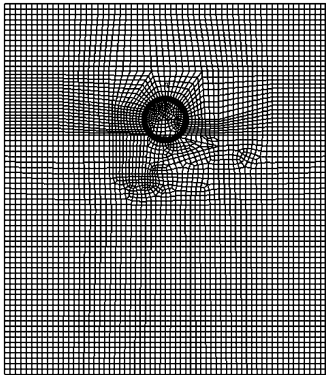


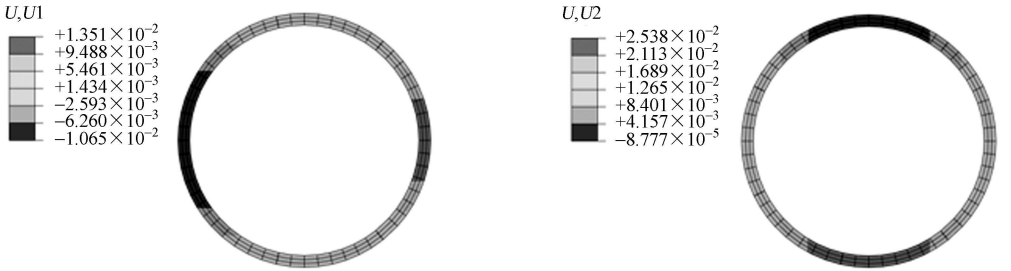
图 5 有限元计算网格  
Fig. 5 Finite element mesh

竖向相对位移由 25.4 mm 变化为 19.5 mm. 这主要是由于土体发生蠕变作用, 使得管片有向内收敛.

表 1 土体计算参数表

Tab. 1 Computational parameters of soil

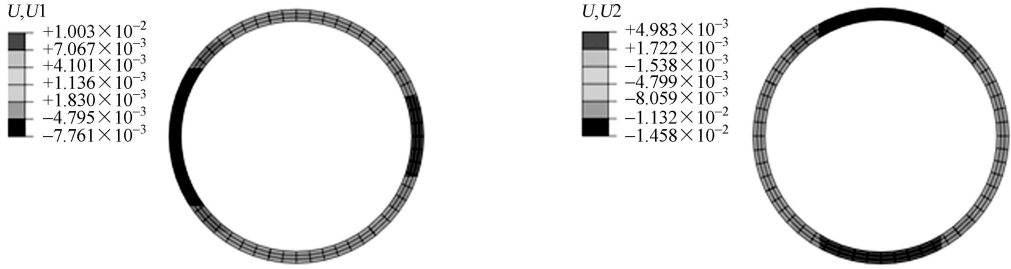
土层和 管片	试验参数					ABAQUS 输入参数				
	$\gamma_{sat}/\text{kN}\cdot\text{m}^{-3}$	$E_H/\text{MPa}$	$\mu_H$	$E_K/\text{MPa}$	$\eta_K/\text{MPa}\cdot\text{月}$	$\gamma_{sat}/\text{kN}\cdot\text{m}^{-3}$	$E_H/\text{MPa}$	$\mu_H$	$g_1$	$\tau_1$
粉细砂	19.64	6.0	0.27	5.8	62.3	19.64	6.0	0.27	0.55	4.83
中砂 1	19.83	7.4	0.28	7.2	75.6	19.83	7.4	0.28	0.55	4.76
中砂 2	20.58	8.0	0.30	7.6	79.8	20.58	8.0	0.30	0.55	4.74
中砂 3	20.42	8.0	0.30	7.6	79.8	20.42	8.0	0.30	0.55	4.74
中砂 4	20.21	9.0	0.30	8.7	93.9	20.21	9.0	0.30	0.54	4.92
管片	25.00	35 500	0.167	—	—	25.00	35 500	0.167	—	—



(a) 管片水平位移云图 (b) 管片竖向位移云图

图 6 Visco 准静态分析步开始时的管片瞬时弹性位移

Fig. 6 Instantaneous elastic displacement of segment at the beginning of step 3



(a) 管片水平位移云图 (b) 管片竖向位移云图

图 7 Visco 准静态分析步结束时的管片粘弹位移

Fig. 7 Viscous elastic displacement of segment at the end of step 3

管片拱顶、拱底竖向位移, 以及右侧拱腰水平位移随时间的变化曲线, 如图 8 所示. 从图 8 可看出, 随着时间的增加, 管片在不同位置处的位移均达到稳定的收敛值, 这与一维情形下 Merchant 模型的蠕变特性相吻合. 拱顶由瞬时弹性竖向位移- 0.08 mm, 经 14 月稳定至- 16.2 mm; 拱底竖向位移由 25.3 mm 变化至 0.4 mm; 右侧拱腰水平位移由 13.5 mm 变化至 10.7 mm.

4 结论

研究将线性粘弹微分型本构方程应用于 ABAQUS 分析平台的方法. 推导 Burger 模型, Merchant 模型及 Poyning-Thomson 线性粘弹微分型本构方程的松弛剪切模量 prony 级数形式, 并确定其在 ABAQUS 中的输入参数.

通过三维蠕变和松弛的数值模拟结果与一维情形下的解析解进行对比, 表明两者的计算结果吻合较好. 最后, 对土体采用 Merchant 粘弹性流变模型的

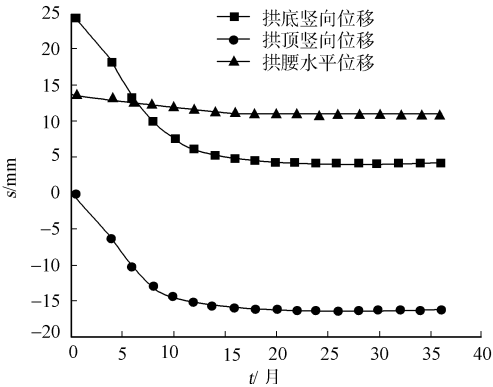


图 8 管片位移随时间的变化曲线

Fig. 8 Curves of displacement to time at different location of segment

过江盾构隧道进行了粘弹性数值分析, 得到了管片位移均趋于稳定值, 进一步说明所提出的方法是正确的和可靠的, 可以应用于岩土工程数值计算.

对于将其他线性粘弹微分型本构方程的应用到 ABAQUS 中, 所提出方法具有一定的参考价值.

#### 参考文献:

- [ 1 ] 赵永辉. 润扬长江大桥北锚碇土体流变特性的试验研究[ J ]. 地下空间, 2003, 23( 4 ): 417-420.
- [ 2 ] 谢宁, 孙钧. 上海地区饱和软粘土流变特性[ J ]. 同济大学学报, 1996, 24( 3 ): 233-237.
- [ 3 ] 刘朝丰, 鲍文魁, 徐景龙. 剪切模量的近似函数和精确数值积分表达式[ J ]. 上海航天, 2003, 20( 5 ): 26-28.
- [ 4 ] 焦春茂, 赵春风, 张征, 等. 遗传积分型本构方程的两种推演方法及比较[ J ]. 地下空间与工程学报, 2008, 3( 4 ): 42-45.
- [ 5 ] 王琛, 刘浩吾. 线性积分模型和微分模型的普遍流变方程[ J ], 土木工程学报, 2003, 36( 10 ): 99-102.
- [ 6 ] THOMAS F S. Finite-element calculation of stresses in glass parts undergoing viscous relaxation[ J ]. J Am Ceram Soc, 1999, 70( 2 ): 90-95.
- [ 7 ] 孙钧. 岩土材料流变及其工程应用[ M ]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999: 1-40.
- [ 8 ] 章根德, 何鲜, 朱维耀. 岩石介质流变学[ M ]. 北京: 科学出版社, 1999: 20-60.
- [ 9 ] 王智祥, 刘金明, 刘柏雄, 等. AZ61 镁合金热压缩流变应力的实验[ J ]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2009, 30( 3 ): 248-252
- [ 10 ] HKS Inc. ABAQUS user' s manual[ M ]. Pawtucket: Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc, 2002.
- [ 11 ] 王芝银, 李云鹏. 岩体流变理论及其数值模拟[ M ]. 北京: 科学出版社, 2008: 6-30.
- [ 12 ] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[ M ]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994: 303-390.

## A Method Using Linear Viscoelastic Differential Constitutive Equation into ABAQUS

PAN Xiao-ming<sup>1</sup>, YU Jun<sup>2</sup>,  
YANG Zhao<sup>1</sup>, KONG Juan<sup>1</sup>

( 1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of  
Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. School of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** Taking three parameter Merchant model, Poyning-Thomson model and four parameter Burger model as example, the relaxation shear modulus with prony series forms is derived by three kinds of commonly used differential type constitutive equation, their parameters is determined to input in ABAQUS. In order to analyze the rheological characteristics, the creep and relaxation numerical solutions of three models agree well to analytical solutions. Using Merchant viscoelastic rheological model, the viscoelasto numerical calculation of cross river shield tunnel is carried out, the stabile values of segment displacement are obtained, which indicate the proposed method is correct and reliable, and can be applied to geotechnical engineering numerical calculation.

**Keywords:** differential constitutive; Laplace transform; prony series; creep; relax; ABAQUS

( 责任编辑: 钱筠      英文审校: 方德平)