第 31 卷　第 4 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 31　No. 4
2010 年 7 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Jul. 2010

文章编号: 1000-5013(2010)04-0480-03

可加布朗运动增量“快点”集的 Packing 维数

邱志平[1], 林火南[2]

(1. 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021;
2. 福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350007)

摘要: 讨论可加布朗运动样本轨道的重分形分析问题. 利用构造上极限型集, 集的乘积的 Packing 维数和 Hausdorff 维数关系的方法, 分别得到其局部增量和沿坐标方向增量两种不同增量形式“快点”集的 Packing 维数结果.

关键词: 可加布朗运动; “快点”集; Packing 维数; 重分形分析
中图分类号: O 211.6　文献标识码: A

1 预备知识

Orey 等[1]在讨论布朗运动的重对数律时, 得到了布朗运动增量“快点”集的 Hausdorff 维数结果. 在多指标随机过程研究中, Wiener 单是最具重要性和代表性. 在讨论 Wiener 单的样本轨道性质中, 可加布朗运动起到关键的作用[2-5], 但是, 可加布朗运动是可加 Lévy 过程(Additive Lévy Processes)的特例, 是源自 Lévy 过程的相交与自相交问题[6]. 可加 Lévy 过程是指满足

$$X(t)=X_1(t_1)+\cdots+X_N(t_N),\qquad \forall t=(t_1,t_2,\cdots,t_N)\in \mathbf{R}_+^N$$

条件的多指标随机过程, 即

$$X=\{X(t):\ t\in \mathbf{R}_+^N\}.$$

其中, $X_i=\{X_i(t):\ t\in\mathbf{R}_+\}(1\leqslant i\leqslant N)$是取值于 $\mathbf{R}^d$ 相互独立的 Lévy 过程. 若 $X_i(1\leqslant i\leqslant N)$均为布朗运动, 则称 $X=\{X(t):\ t\in\mathbf{R}_+^N\}$为可加布朗运动.

设 $\phi(h)=\sqrt{2h\log h^{-1}}$, $X=\{X(s):\ s\in\mathbf{R}_+^N\}$是可加布朗运动. 它关于局部增量“α-快点”集记为

$$A_T(\alpha)=\left\{s\in(0,T]^N:\ \limsup_{h\downarrow 0}\frac{|X(s+h)-X(s)|}{\phi(h_1+\cdots+h_N)}\geqslant\alpha\right\},\tag{1}$$

而沿坐标方向增量“α-快点”集记为

$$B_T(\alpha)=\left\{s\in(0,T]^N:\ \limsup_{h\downarrow 0}\frac{|X(s_1,\cdots,s_{N-1},s_N+h)-X(s)|}{\phi(h)}\geqslant\alpha\right\}.\tag{2}$$

文[7]得到了 $A_T(\alpha)$与 $B_T(\alpha)$ Hausdorff 维数结果, 当 $T>0$, $0\leqslant\alpha\leqslant\sqrt{N}$时, 则 $\dim(A_T(\alpha))=N-\alpha^2$, a.s.(即几乎处处, 下略); 而当 $T>0$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时, 则 $\dim(B_T(\alpha))=N-\alpha^2$, a.s..

与文[7]类似, 只须分别考虑 $\alpha\in[0,\sqrt{N}]$情形 $A_T(\alpha)$和 $\alpha\in[0,1]$情形 $B_T(\alpha)$的 Packing 维数问题.

定理 1 设 $T>0$, $0\leqslant\alpha<1$, $A_T(\alpha)$如式(1)所示, 则 $\dim(A_T(\alpha))=N$, a.s..

定理 2 设 $T>0$, $0\leqslant\alpha<1$, $B_T(\alpha)$如式(2)所示, 则 $\dim(B_T(\alpha))=N$, a.s..

由此可发现, 当 $0<\alpha<1$ 时, $A_T(\alpha)$和 $B_T(\alpha)$的 Hausdorff 维数与其 Packing 维数不相等.

2 基本引理

约定在同一完备概率空间(Ω,F,P)上讨论问题. 用 $\mathbf{R}_+^N=[0,+\infty)^N$ 表示指标空间; $s=(s_1,s_2,\cdots,$

收稿日期: 2008-09-24
通信作者: 邱志平(1979-), 男, 讲师, 主要从事随机过程理论及应用的研究. E-mail: qzp@hqu.edu.cn.
基金项目: 华侨大学科研基金资助项目(08HZR20)

$s_N)$, $t=(t_1, t_2, \cdots, t_N)$ 表示 $\mathbf{R}_+^N$ 上的点; $s<t$ 表示 $s_i<t_i$, $i=1,2,\cdots,N$; $[s,t]=\times_{i=1}^{N}[s_i,t_i]$, 表示 $\mathbf{R}_+^N=[0,+\infty)^N$ 上的维超方体. 令 $M_n=\{\times_{i=1}^{N}[2^{-n}m_i, 2^{-n}(m_i+1)), 0\leqslant m_i\leqslant 2^n-1$, 且 $m_i\in Z\}$, 表示 $[0,1]^N$ 中边长为 2^{-n} 且其边平行于坐标轴的左闭右开 N 维立方体的集合. 有时 $\boldsymbol{c}$ 表示分量同为常数 c 的向量, 即 $\boldsymbol{c}=(c,c,\cdots,c)$.

设 φ: $[o,e^{-1}]\to[0,+\infty)$ 为单调递增连续函数, 且 $\varphi(0)=0$. 对任意集合 $E\subseteq\mathbf{R}^d$, 令 $\varphi-p^*(E)=\lim\sup_{\varepsilon\to0}\{\sum_i\varphi(2r_i): B(x_i,r_i)$ 两两不交, $x_i\in E, r_i\leqslant\varepsilon\}$. 其中, $B(x,r)$ 表示是以 x 为圆心, r 为半径的球. 显然, $\varphi-p^*(E)$ 不是一个距离外测度, 更不是测度[8]. 经过修正后, 记

$$\varphi-p(E)=\inf\{\sum_n\varphi-p^*(E_n): E\subseteq\bigcup_n E_n\},$$

则 $\varphi-p(E)$ 是一个测度, 称 $\varphi-p(E)$ 为 E 的 Packing 测度. 定义 E 的 Packing 维数为

$$\dim(E)=\inf\{\alpha>0: s^\alpha-p(E)=0\}=\sup\{\alpha>0: s^\alpha-p(E)=+\infty\}.$$

有关 Packing 测度和 Packing 维数的有关性质, 可参见文[8].

设 $B_i=\{B_i(t_i): t_i\in\mathbf{R}_+\}(1\leqslant i\leqslant N)$, 是定义在 (Ω,F,P) 上的标准布朗运动, 它们相互独立, 若

$$X(t)=B_1(t_1)+\cdots+B_N(t_N),\qquad\forall t=(t_1,t_2,\cdots,t_N)\in\mathbf{R}_+^N.$$

则称 $X=\{X(t): t\in\mathbf{R}_+^N\}$ 为 N-指标可加布朗运动.

引理 1[9]　如果对 $\forall n\geqslant1$, V_n 是 $[0,1]^N$ 中的开集, 且在 $[0,1]^N$ 中稠密, 则 $\dim(\bigcap_n V_n)=N$.

3　主要结果及其证明

下面, 给出可加布朗运动局部增量"快点"集的 Packing 维数.

定理 3　设 $T>0$, $0\leqslant\alpha_0<1$, $A_T(\alpha_0)$ 如式(1)所示, 则 $\dim(A_T(\alpha_0))=N$, a.s..

证明　仅对 $N=2$ 的情况给予证明, $N>2$ 的情况类似可得. 不妨假设 $T=1$, $\alpha_1\in(\alpha_0,1)$, $\delta_n=n2^{-n}$ $(n\geqslant1)$. 定义一族服从(0-1)分布的随机变量序列 $\{Z_I\}_{I\in M_n}(n\geqslant1)$ 如下:

对于 $I=[(i,j)2^{-n},(i,j)2^{-n}+\langle2^{-n}\rangle)$, $Z_I=1$, 当且仅当 $|X((i,j)2^{-n}+\langle\delta_n\rangle)-X((i,j)2^{-n}|\geqslant\alpha_1\times\sqrt{2(2\delta_n)\log(2\delta_n)^{-1}}$.

由布朗运动一致连续模结果[1]可知, 几乎处处(a.s.)地存在 $n_0=n_0(\omega)$, 使得当 $n\geqslant n_0(\omega)$ 时, 对于 $\forall I\in M_n$, $\forall s\in I$, 有

$$|B_1(i2^{-n})-B_1(s_1)|\leqslant2\sqrt{2^{-n+1}\log2^n},$$
$$|B_2(j2^{-n})-B_2(s_2)|\leqslant2\sqrt{2^{-n+1}\log2^n},$$
$$|B_1(i2^{-n}+\delta_n)-B_1(s_1+\delta_n)|\leqslant2\sqrt{2^{-n+1}\log2^n},$$
$$|B_2(j2^{-n}+\delta_n)-B_2(s_2+\delta_n)|\leqslant2\sqrt{2^{-n+1}\log2^n}.$$

若进一步地, $Z_I=1$, 当 n 充分大之后, 则有

$$\begin{aligned}|X(s+\langle\delta_n\rangle)-X(s)|\geqslant&|X((i,j)2^{-n}+\langle\delta_n\rangle)-X(i,j)2^{-n}|-|B_1(s_1)-B_2(i2^{-n})|-\\&|B_2(j2^{-n})+B_2(s_2)|-|B_1(i2^{-n}+\delta_n)-B_1(s_1+\delta_n)|-|B_2(j2^{-n}+\delta_n)-B_2(s_2+\delta_n)|\geqslant\\&\alpha_1\sqrt{2(2\delta_n)\log(2\delta_n)^{-1}}-8\sqrt{2^{-n+1}\log2^n}\geqslant\alpha_0\sqrt{2(2\delta_n)\log(2\delta_n)^{-1}}.\end{aligned}\tag{3}$$

令 $A(n)=\bigcup\{I: I\in M_n, Z_I=1)$, $A=\lim\sup_n A(n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A(k)$. 由式(3)可以得到, $A\subseteq A_1(\alpha_0)$. 记 $V_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A^0(k)$. 这里, $A^0(k)$ 为 $A(k)$ 的内点集. 对固定 m, $I\in M_n$, 由文[1]中的式(2.3), 存在正有限常数 c_1 和 $\boldsymbol{c}$, 使得当 n 充分大且 $k\geqslant n$ 时, 有

$$\begin{aligned}P(A^0(k)I=\varnothing)\leqslant P(J\subseteq I, J\in M_k, Z_J=0)\leqslant\\c_1(P|N(0,1)|<\alpha_1\sqrt{2\log(2\delta_n)^{-1})})^{2^{k-m}/k}\leqslant\\c_1(1-\boldsymbol{c}(\frac{2^{k-1}}{k})^{-\alpha_1^2})^{2^{k-m}/k}\leqslant c_1(\exp\{-\frac{k^{\alpha_1^2-1}}{2^{k(\alpha_1^2-1)}}\})^{c}.\end{aligned}$$

于是, $\sum_k P(A^0(k)I=\varnothing)<\infty$. 由 Borel-Cantelli 引理, 可得 $P(V_n I=\varnothing)=0$, 因而 V_n 在 $[0,1]^2$ 内几乎处处稠密且为 $[0,1]^2$ 的开集; 由引理 1 可得, $\dim(A)=2$, a.s.. 定理得证. 利用集的乘积的 Packing 维数和 Hausdorff 维数关系, 推导出可加布朗运动沿坐标方向增量"快点"集的 Packing 维数, 即

定理 4 设 $T>0$, $0\leqslant\alpha_0<1$, $B_T(\alpha_0)$ 如式(2)所示, 则 $\dim(B_T(\alpha_0))=N$, a.s..

证明 仅对 $N=2$ 的情况给予证明, $N>2$ 的情况类似可得. 由于

$$B_T(\alpha_0)=(0,T]\times\{s_2\in(0,T]:\ \overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{|B_2(s_2+h)-B_2(s_2)|}{\phi(h)}\geqslant\alpha_0\},$$

对于 $\forall E, F\subseteq\mathbf{R}^d$ [10], 有

$$\dim(E)+\dim(F)\leqslant\dim(E\times F)\leqslant\dim(E)+\dim(F).$$

若 $B=\{B(t):\ t\in\mathbf{R}_+\}$ 为布朗运动[11], 则对 $\forall\alpha_0\in[0,1)$, 有 $\dim\{s\in(0,T]:\ \overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{|B(s+h)-B(s)|}{\phi(h)}\geqslant\alpha_0\}=1$, a.s..

综上所述, 可得 $\dim(B_T(\alpha_0))\geqslant\dim((0,T])+\dim\{s_2\in(0,T]:\ \overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{|B_2(s_2+h)-B_2(s_2)|}{\phi(h)}\geqslant\alpha_0\}=2$. 定理得证.

参考文献:

[1] OREY S, TAYLOR S J. How often on a Brownian path does the law of iterated logarithm fail? [J]. Proc London Math Soc, 1974, 28(1): 174-192.

[2] 黄群, 林火南. 布朗单样本轨道的重分形分析[J]. 福建师范大学学报: 自然科学版, 2003, 19(2): 1-8.

[3] EHM W. Sample function properties of mutli-parameter stable processes[J]. Probability Theory and Related Fields, 1981, 56(2): 195-228.

[4] 林火南. Wiener 单的局部时和水平集的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学: A 辑, 2000, 30(10): 869-880.

[5] KHOSHNEVISAN D, SHI Z. Brownian sheet and capacity[J]. Ann Probab, 1999, 27(3): 1135-1159.

[6] KHOSHNEVISAN D, XIAO Y M. Level sets of additive Lévy processes[J]. Ann Probab, 2002, 30(1): 62-100.

[7] 邱志平, 林火南. 可加布朗运动样本轨道的重分形分析[J]. 福建师范大学学报: 自然科学版, 2004, 20(4): 14-19.

[8] FALCONER K J. Fractal geometry-mathematical foundations and application[M]. New York: John Wiley, 1990.

[9] DEMBO A, PERES Y, ROSEN J, et al. Thick points for spatial Brownian motion: Multifractal analysis of occupation measure[J]. Ann Probab, 2000, 28(1): 1-35.

[10] TRICOT C. Two definitions of fractal dimension[J]. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1982, 91(1): 57-74.

[11] XIAO Yi-min. Packing dimension, Hausdorff dimension and Cartesian product sets[J]. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1996, 120(3): 535-546.

Packing Dimension of "Fast Point" Sets for Additive Brownian Motion

QIU Zhi-ping[1], LIN Huo-nan[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)

Abstract: The multifractal analysis for the sample paths of additive Brownian motion is discussed in this paper. The Packing dimension of "fast point" sets determined by the local increment and by the incerment in the direction of coordinate for additive Brownian motion are obtained respectively by means of constructing a limsup random set and the relation between Packing dimension and Hausdorff dimension of the Product sets.

Keywords: additive Brownian motion; "fast point" sets; Packing dimension; multifractal analysis

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)