第31卷　第4期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 31　No. 4
2010年7月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2010

文章编号: 1000-5013(2010)04-0476-04

单位圆上调和拟共形映照的复特征估计

朱剑峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 设 $f(x)=\exp[i\gamma(x)]$ 为单位圆周 ∂D 到自身上的保向同胚映照, $w=P[f](z)$ 是单位圆 D 到自身上的单叶调和函数, $f(x)$ 为边界值. 研究边界函数 $f(x)$, 得到 J_w 的一个良好估计. 当 w 为调和拟共形映照时, 对其复特征 $\left|\frac{\bar{\partial} w}{\partial w}\right|$ 进行估计.

关键词: 调和映照; 拟共形映照; 伸缩商; 偏差估计
中图分类号: O 174.55　　　　文献标识码: A

单叶调和函数与单叶函数论、调和分析、拟共形映照理论都有密切的联系. 近年来, 对单位圆上单叶调和函数的研究非常活跃, 特别是 $w=P[f](z)$ 在何种条件下成为调和拟共形映照, 有很深入的研究. 文[1-3]给出了 $w=P[f](z)$ 成为调和拟共形映照的充要条件, 但对其复特征模的估计没有涉及; 文[4-7]研究了 w 为调和 k-拟共形映照的的一些相关性质; 文[8-9]估计了两类单叶调和映照的偏差估计. 本文研究 w 的边界函数, 给出 w 为拟共形映照时其偏导数及复特征模的估计.

1　基本假定

以下不另做声明, 均假设 $f(x)=\exp[i\gamma(x)]$. 定义 $w=u+iv$ 为平面区域 Ω 上的单叶调和函数. 若 Ω 为单连通区域, 则存在 $h(z)$, $g(z)$ 为 Ω 上的解析函数, 使得 $w=h+\bar{g}$.

记 $a(z)=\dfrac{g'(z)}{h'(z)}$, $z\in\Omega$, 由 Lewy 定理可知, $J_w=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2>0$. 如果存在 $k<1$, 使得对于任意的 $z\in\Omega$ 有 $\sup\limits_{z\in\Omega}|a(z)|\leqslant k<1$. 那么, 称 w 为 Ω 上的调和 k-拟共形映照.

假设, 泊松积分核 $p(r,x-\varphi)=\dfrac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos(x-\varphi)+r^2)}$. 对于单位圆周 ∂D 上的保向同胚映照 f, 可令

$$w=P[f](z)=\int_0^{2\pi}p(r,x-\varphi)f(x)\mathrm{d}x,\qquad z=r\exp(i\varphi)\in D,\tag{1}$$

则由 Lewy 定理可知, $w=P[f](z)$ 是单位圆 D 内的单叶调和函数.

令 $f(x)=\exp[i\gamma(x)]$, $x\in\mathbf{R}$, 满足 $f(x\pm2\pi)=\exp[i\gamma(x\pm2\pi)]=f(x)$. 如果 $\gamma(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 绝对连续, 则对于几乎所有的 $x\in[0,2\pi]$, 有

$$f'(x)=i\gamma'(x)\exp[i\gamma(x)],\qquad |f'(x)|^2=\gamma'(x)^2.$$

2　主要结果及其证明

考虑到 J_w 与 $|\partial w|$, $|\bar{\partial} w|$ 及复特征 $\left|\frac{\bar{\partial} w}{\partial w}\right|$ 之间的关系, 给出如下两个引理.

收稿日期: 2008-09-14
通信作者: 朱剑峰(1980-), 男, 讲师, 主要从事函数论的研究. E-mail: flandy@hqu.edu.cn.
基金项目: 华侨大学科研基金资助项目(08HZR19)

引理 1　假设, $w=P[f](z)$ 为单位圆 D 到自身上的单叶调和映照, 满足 $w(0)=0$. 如果 $|f'(x)|=\gamma'(x)\geqslant B$, $\forall x\in[0,2\pi]$, 则对于任意的 $z=r\exp(\mathrm{i}\varphi)\in D$, 有 $J_w(z)\geqslant\frac{B}{2}$. 其中, B 为正常数.

证明　设 $w=P[f](z)=u+\mathrm{i}v$, 则由式(1)可知, 对于任意的 $z=r\exp(\mathrm{i}\gamma)\in D$, 有

$$u(r\exp(\mathrm{i}\varphi))=\int_0^{2\pi}p(r,x-\varphi)\cos\gamma(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$v(r\exp(\mathrm{i}\varphi))=\int_0^{2\pi}p(r,x-\varphi)\sin\gamma(x)\,\mathrm{d}x,$$

而且有

$$\partial_\varphi w(r\exp(\mathrm{i}\varphi))=\int_0^{2\pi}f'(x)p(r,\varphi-x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$\partial_r w(r\exp(\mathrm{i}\varphi))=\int_0^{2\pi}f'(x)\sin(x-\varphi)p(r,\varphi-x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

由文[2]的定理可知, 极限 $\lim\limits_{r\to1^-}\partial_\varphi w(r\exp(\mathrm{i}\gamma))$ 几乎处处存在, 且有

$$\lim_{r\to1^-}\partial_\varphi w(z)=f'(\varphi)=\mathrm{i}\gamma'(\varphi)\exp(\mathrm{i}\gamma(\varphi)).$$

于是, 有

$$\lim_{r\to1^-}u_\varphi(z)=-\gamma'(\varphi)\sin\gamma(\varphi),\qquad\lim_{r\to1^-}v_\varphi(z)=\gamma'(\varphi)\cos\gamma(\varphi).$$

注意到 $u(\exp(\mathrm{i}\varphi))=\cos\gamma(\varphi)$ 及 $v(\exp(\mathrm{i}\varphi))=\sin\gamma(\varphi)$, 所以有

$$\lim_{z\to\exp(\mathrm{i}\varphi)}J_w(z)=\lim_{r\to1^-}\frac{1}{r}(u_rv_\varphi-u_\varphi v_r)=\lim_{r\to1^-}\left(\frac{u(\exp(\mathrm{i}\gamma))-u(r\exp(\mathrm{i}\gamma))}{1-r}\right)(\gamma'(\varphi)\cos\gamma(\varphi))+$$

$$\lim_{r\to1^-}\left(\frac{v(\exp\mathrm{i}\gamma))-v(r\exp(\mathrm{i}\gamma))}{1-r}\right)(\gamma'(\varphi)\sin\gamma(\varphi))=\lim_{r\to1^-}\int_0^{2\pi}K(x,\varphi)\left(\frac{p(r,\varphi-x)}{1-r}\right)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

式(4)中, $K(x,\varphi)=\gamma'(\varphi)-\gamma'(\varphi)\cos(\gamma(\varphi)-\gamma(x))\geqslant0$. 因为有

$$\frac{p(r,\varphi-x)}{1-r}=\frac{1+r}{2\pi(1+r^2-2r\cos(\varphi-x))}\geqslant\frac{1}{(1+r)2\pi}\geqslant\frac{1}{4\pi},$$

所以, 利用 $w(0)=0$, 可得到

$$\lim_{r\to1^-}\int_0^{2\pi}K(x,\varphi)\frac{p(r,\varphi-x)}{1-r}\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\lim_{r\to1^-}\int_0^{2\pi}\gamma'(\varphi)[1-\cos(\gamma(\varphi)-\gamma(x))]\frac{1}{4\pi}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\gamma'(\varphi)\frac{1}{4\pi}\mathrm{d}x\geqslant\frac{B}{2}.$$

即 $\lim\limits_{z\to\exp(\mathrm{i}\varphi)}J_w(z)\geqslant\frac{B}{2}$. 由 $h'(z)$ 及 $g'(z)$ 的解析性可知, $|J_w(z)|=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2\geqslant\frac{B}{2}$.

另一方面, 如果 $|f'(x)|\leqslant A$, 则有如下引理.

引理 2　设 $w=P[f](z)$ 为单位圆 D 到自身上的调和映照, 满足 $w(0)=0$. 如果 $|f'(x)|=\gamma'(x)\leqslant A$, 则对于任意的 $z\in D$, 有 $J_w(z)\leqslant\frac{\pi^2A^3}{4}$.

证明　由式(4)可知

$$\lim_{z\to\exp(\mathrm{i}\varphi)}J_w(z)=\lim_{r\to1^-}\frac{1}{r}(u_rv_\varphi-u_\varphi v_r)=\lim_{r\to1^-}\int_0^{2\pi}K(x,\varphi)\left(\frac{p(r,\varphi-x)}{1-r}\right)\mathrm{d}x=$$

$$\lim_{r\to1^-}\int_0^{2\pi}2\gamma'(\varphi)\sin^2\left(\frac{\gamma(\varphi)-\gamma(x)}{2}\right)\left(\frac{p(r,\varphi-x)}{1-r}\right)\mathrm{d}x=$$

$$\lim_{r\to1^-}\int_0^{\pi}2\gamma'(\varphi)\sin^2\left(\frac{\gamma(\varphi)-\gamma(\varphi-x)}{2}\right)\left(\frac{p(r,x)}{1-r}\right)\mathrm{d}x+$$

$$\lim_{r\to1^-}\int_0^{\pi}2\gamma'(\varphi)\sin^2\left(\frac{\gamma(\varphi)-\gamma(\varphi+x)}{2}\right)\left(\frac{p(r,x)}{1-r}\right)\mathrm{d}x.$$

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时, $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant\left(\frac{x}{\pi}\right)$, 所以有

$$\frac{p(r,x)}{1-r}=\frac{1}{2\pi}\frac{1+r}{(1-r)^2+4r\sin^2(x/2)}\leqslant\frac{1+r}{2\pi}\frac{\pi^2}{4rx^2}.$$

利用不等式 $\sin^2 x \leqslant x^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$ 及 $|\gamma(x)-\gamma(y)|=|\gamma'(\xi)(x-y)|\leqslant A|x-y|$, 可得到

$$\lim_{z\to\exp(\mathrm{i}\varphi)} J_w(z)\leqslant\lim_{r\to 1^-}2\gamma'(\varphi)\int_0^{\pi}\left(\frac{\gamma(\varphi)-\gamma(\varphi-x)}{2}\right)^2\frac{1+r}{2\pi}\frac{\pi^2}{4rx^2}\mathrm{d}x+$$

$$\lim_{r\to 1^-}2\gamma'(\varphi)\int_0^{\pi}\left(\frac{\gamma(\varphi)-\gamma(\varphi+x)}{2}\right)^2\frac{1+r}{2\pi}\frac{\pi^2}{4rx^2}\mathrm{d}x\leqslant 4A\lim_{r\to 1^-}\int_0^{\pi}\frac{A^2x^2}{4}\frac{1+r}{2\pi}\frac{\pi^2}{4rx^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2A^3}{4}.$$

所以, $\forall z\in D$, $J_w(z)\leqslant\dfrac{\pi^2A^3}{4}$.

有了引理 1, 引理 2, 下面证明两个主要结果.

定理 1 假设 $f(x)=\exp(\mathrm{i}\gamma(x))$ 为单位圆周 ∂D 到自身上的同胚映照, $f(x)$ 满足如下 3 个条件: (Ⅰ) $\operatorname{ess\,sup}_x \gamma'(x)\leqslant A<+\infty$; (Ⅱ) $\operatorname{ess\,inf}_x \gamma'(x)\geqslant B>0$; (Ⅲ) 对于任意的 $z=r\exp(\mathrm{i}\varphi)\in D$, 则有 $\operatorname{ess\,sup}_{\varphi\in\mathbf{R}}\dfrac{1}{\pi}\times\left|\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{f'(\varphi+x)-f'(\varphi-x)}{\mathrm{tg}(x/2)}\mathrm{d}x\right|\leqslant M$, $w=p[f](z)$ 为 D 上的 k-调和拟共形映照, 且 $k\leqslant\sqrt{1-\dfrac{2B}{(A+M)^2}}$.

证明 由式(2), (3) 可得

$$\lim_{r\to 1^-}\partial_\varphi w(r\exp(\mathrm{i}\varphi))=f'(\varphi)=\mathrm{i}\gamma'(\varphi)\exp(\mathrm{i}\gamma(\varphi)),$$

且
$$\partial_r w(r\exp(\mathrm{i}\varphi))=\frac{-2}{1-r^2}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin(x-\varphi)p(r,\varphi-x)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{-2}{1-r^2}\int_0^{\pi}(f'(\varphi+x)-f'(\varphi-x))\sin x\,p(r,x)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f'(\varphi+x)-f'(\varphi-x)}{\mathrm{tg}(x/2)}\frac{\mathrm{tg}(x/2)\sin x}{(1-r)^2+4r\sin^2(x/2)}\mathrm{d}x.$$

所以, 有

$$\lim_{r\to 1^-}|\partial_\varphi w(r\exp(\mathrm{i}\varphi))|\leqslant A,$$

$$\lim_{r\to 1^-}|\partial_\varphi w(r\exp(\mathrm{i}\varphi))|=\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\frac{f'(\varphi+x)-f'(\varphi-x)}{\mathrm{tg}(x/2)}\mathrm{d}x\right|\leqslant M.$$

由 $h'(r\exp(\mathrm{i}\varphi))=\dfrac{\exp(-\mathrm{i}\varphi)}{2}\left(\partial_r w-\mathrm{i}\dfrac{\partial_\varphi w}{r}\right)$, 可得

$$\lim_{r\to 1^-}|h'(z)|\leqslant\frac{1}{2}\lim_{r\to 1^-}\left(|\partial_r w|+\frac{|\partial_\varphi w|}{r}\right)\leqslant\frac{A+M}{2},$$

故 $|h'(z)|\leqslant\dfrac{A+M}{2}$, $\forall z\in D$.

由引理 1 可知, $J_w=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2\geqslant\dfrac{B}{2}$, 所以, 有 $\left|\dfrac{g'(z)}{h'(z)}\right|^2\leqslant 1-\dfrac{B}{2|h'(z)|^2}\leqslant 1-\dfrac{2B}{(A+M)^2}$.

即 $w=p[f](z)$ 为 k-调和拟共形映照且 $k\leqslant\sqrt{1-\dfrac{2B}{(A+M)^2}}$. 证毕.

对于定理 1 中的 3 个条件, 文[1]已证明了 w 具有拟共形的性质, 也就是说, 条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)是 w 为调和拟共形映照的充要条件. 但是, 文[1]中没有涉及到对 $|h'(z)|$ 及一些相应量的估计. 针对以上一些量的估计, 进一步的研究得到如下的定理.

定理 2 设 $w=p[f](z)$ 为单位圆 D 到自身上的 k-调和拟共形映照, 满足 $w(0)=0$, 则对于任意的 $z=r\exp(\mathrm{i}\varphi)\in D$, $|h'(z)|\leqslant\dfrac{\pi^2A^3}{4(1-k^2)}$, 且有

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\frac{f'(\varphi+x)-f'(\varphi-x)}{\mathrm{tg}(x/2)}\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\frac{1+k^2}{1-k^2}\frac{\pi^2A^3}{2}-B^2}.$$

其中, $A=K^{3K}2^{5(K-\frac{1}{K})/2}$, $B=\dfrac{2^{5(1-K^2)/2}}{(K^2+K-1)^K}$, $K=\dfrac{1+k}{1-k}$.

证明 因为 $w=p[f](z)$ 为 k-调和拟共形映照, 故有 $\operatorname{ess}\sup_{z=r\exp(\mathrm{i}\varphi)\in D}\left|\dfrac{g'(z)}{h'(z)}\right|\leqslant k<1$. 因此, $J_w(z)=$

$|h'(z)|^2-|g'(z)|^2=|h'|^2\left(1-\left|\frac{g'}{h'}\right|^2\right)\geqslant|h'|^2(1-k^2)$. 由文[4]的定理可知

$$B=\frac{2^{5(1-K^2)/2}}{(K^2+K-1)^K}\leqslant|f'(x)|\leqslant K^{3K}2^{5(K-\frac{1}{K})/2}=A.$$

式中, $K=\frac{1+k}{1-k}>1$. 利用引理 2 可得, $J_w(z)\leqslant\frac{\pi^2A^3}{4}$, 即 $|h'|^2\leqslant\frac{\pi^2A^3}{4(1-k^2)}$. 因为 $h'(r\exp(\mathrm{i}\varphi))=\frac{\exp(-\mathrm{i}\varphi)}{2}\left(\partial_r w-\mathrm{i}\frac{\partial_\varphi w}{r}\right)$, $\overline{g'(r\exp(\mathrm{i}\varphi))}=\frac{\exp(\mathrm{i}\varphi)}{2}\left(\partial_r w+\mathrm{i}\frac{\partial_\varphi w}{r}\right)$, 故可得

$$|h'(z)|^2+|g'(z)|^2=\frac{1}{2}\left(|\partial_\varphi w|+\frac{|\partial_\varphi w|^2}{r^2}\right).$$

再利用 $|h'(z)|^2+|g'(z)|^2\leqslant|h'(z)|^2(1+k^2)\leqslant\frac{1+k^2}{(1-k^2)}\frac{\pi^2A^3}{4}$ 及 $\lim\limits_{r\to1^-}\partial_\varphi w(r\exp(\mathrm{i}\varphi))=f'(\varphi)$, 可得

$$\lim_{r\to1^-}|\partial_\varphi w(r\exp(\mathrm{i}\varphi))|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi\frac{f'(\varphi+x)-f'(\varphi-x)}{\mathrm{tg}(x/2)}\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\frac{1+k^2}{1-k^2}\frac{\pi^2A^3}{2}-B^2}.$$

证毕.

参考文献:

[1] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisma of the unit disk[J]. Ann Acad Sci Fenn (Series A1): Math, 2002, 27(2): 365-372.

[2] KALAJ D. Quasiconformal harmonic functions between convex domains[J]. Publications De L'Institut Mathématique, 2004, 76(90): 3-20.

[3] PARTYKA D, SAKAN K. On an asymptotically sharp variant of Heinz's inequality[J]. Ann Acad Sci Fenn (Series A1): Math, 2005, 30(1), 167-182.

[4] PARTYKA D, SAKAN K. On bi-lipschitz type inequalitites for quasiconformal harmonic mappings[J]. Ann Acad Sci Fenn (Series A1): Math, 2007, 32(2): 579-594.

[5] BEUELING A L, AHLFORS V. The boundary correspondence under quasiconformal mapping[J]. Acta Math, 1956, 96(1): 124-142.

[6] LETHO O. Univalent functions and teichmuller spaces[M]. New York: Spring-Verlag, 1987.

[7] CLUNIE J, SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn (Series A1): Math, 1984, 9(1): 3-25.

[8] 吴瑞溢, 黄心中. Salagean 类单叶调和函数的特征[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2008, 29(2): 308-311.

[9] 韩雪, 黄心中. 两类单叶调和函数的偏差估计[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2008, 29(4): 618-621.

Estimate for the Dilatation of Harmonic Quasiconformal Mappings in the Unit Disk

ZHU Jian-feng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Let $f(x)=\exp(\mathrm{i}\gamma(x))$ be a sense-preserving homeomorphism of the unit disk, $w=P[f](z)$ be a harmonic mapping of the unit disk onto itself with boundary values $f(x)$. In this article, by studying the boundory function $f(x)$, we obtain a good estimate for J_w. If w is a harmonic quasiconformal mapping, the complex dilatation of w.

Keywords: harmonic mapping; quasiconformal mapping; dilatation; distortion estimate

(责任编辑: 陈志贤　　英文审校: 张金顺, 黄心中)