第31卷 第4期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.31 No.4
2010年7月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 2010

文章编号: 1000-5013(2010)04-0473-03

正矩阵谱半径及其特征向量的新算法

徐强, 宋海洲, 田朝薇

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 设计一种计算正矩阵谱半径及其特征向量的新算法,并证明算法的收敛性.结果表明,算法具有计算量小,便于实现,且能较快达到所需精度的特点. 数值试验进一步验证了其可行性.

关键词: 正矩阵; 谱半径; 特征向量; 收敛性

中图分类号: O 151.21 **文献标识码**: A

正矩阵的谱半径在数值分析、图论、计算机科学、管理科学等领域中有着重要的作用,因此,对正矩阵谱半径的计算一直都是研究的重点[1-4].通常计算正矩阵的谱半径都是采用幂法[1],但幂法的计算量相对较大.本文设计了一种计算正矩阵谱半径及其特征向量的新算法,并证明了该算法的收敛性.

1 算法的设计

设 $C=(c_{i,j})_{n\times n}$是正矩阵,为了方便叙述,引入一些记号.记 $C_k=(c_{i,j}^k)_{n\times n}$为第 k 步迭代的矩阵,$k=0,1,2,\cdots$; $r_i^k=\sum_{j=1}^n c_{i,j}^k$是 C_k 中第 i 行行和,$i=1,2,\cdots,n$; $r^k=\min_i r_i^k$ 是 C_k 的最小行和; $R^k=\max_i r_i^k$ 是 C_k 的最大行和.计算正矩阵谱半径及特征向量的算法,有如下5个步骤.(1) 输入 C 正矩阵,令 $C_0=C$,记 $C_0=(c_{i,j}^0)_{n\times n}$, $H_0=I$, $\varepsilon>0$, $e=(1,\cdots,1)^T$, $k=0$. (2) 记 $C_k=(c_{i,j}^k)_{n\times n}$,计算 $r_i^k=\sum_{j=1}^n c_{i,j}^k\,(i=1,2,\cdots,n)$, $r^k=\min_i r_i^k$, $R^k=\max_i r_i^k$. (3) 如果 $(R^k-r^k)<\varepsilon$,则转步骤(5);否则,令 $D_k=\mathrm{diag}(\frac{r_1^k}{R^k},\frac{r_2^k}{R^k},\cdots,\frac{r_n^k}{R^k})$,作迭代 $C_{k+1}=D_k^{-1}C_kD_k$. (4) 计算 $H_{k+1}=H_kD_k$, $k=k+1$,转步骤(2). (5) 输出 $\lambda=\frac{1}{2}(R^k+r^k)$, $X=H_ke$.

2 算法收敛性及收敛速度

已知正矩阵 C,先对其谱半径进行上、下界估计.

设 $C=(c_{i,j})_{n\times n}$是正矩阵,$\rho(C)$是 C 的谱半径,设 $r_i=\sum_{j=1}^n c_{i,j}$是 C 的第 i 行行和,$r_1,r_2,\cdots,r_n$ 是 C 的所有行和. 由 Frobenius 定理[1]可以得到,$r_{\min}\le\rho(C)\le r_{\max}$. 其中: $r_{\min}$是 C 的最小行和; $r_{\max}$是 C 的最大行和.构造迭代序列[5] $C_{k+1}=D_k^{-1}C_kD_k$. 其中,$D_k=\mathrm{diag}(\frac{r_1^k}{R^k},\frac{r_2^k}{R^k},\cdots,\frac{r_n^k}{R^k})$, $k=0,1,2,\cdots$; r_i^k 是 D_k 第 i 行行和,$i=1,2,\cdots,n$; $R^k=\max_i r_i^k$. 显然,矩阵序列 C_k 相似,故可得定理1.

定理1 假设 $C=(c_{i,j})_{n\times n}$是正矩阵[5]; $r_i=\sum_{j=1}^n c_{i,j}$是 C 的第 i 行行和,$i=1,2,\cdots,n$; $r=\min_i r_i$; $R=\max_i r_i$; $D=\mathrm{diag}(\frac{r_1}{R},\frac{r_2}{R},\cdots,\frac{r_n}{R})$. 令 $C^*=D^{-1}CD=(c_{i,j}^*)_{n\times n}$,则记 $r_i^*=\sum_{j=1}^n c_{i,j}^*$, $r^*=\min_i r_i^*$, $R^*=$

收稿日期: 2008-06-19

通信作者: 宋海州(1971-),男,副教授,主要从事数学模型及运筹学的研究. E-mail:hzsong@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511028)

$\max\limits_i r_i^*$, $t_{i,j}=\dfrac{c_{i,j}}{r_i}(i,j=1,2,\cdots,n)$, $m=\min t_{i,j}>0$,有 $R^*-r^*\le(1-mn)(R-r)$.

证明 记 $\overline{r}(\sum\limits_{j=1}^{n} r_j)/n$,由于有 $\mathrm{C}^*=\mathrm{D}^{-1}\mathrm{CD}=(c_{i,j}^*)_{n\times n}$,容易有 $c_{i,j}^*=\dfrac{c_{i,j}r_j}{r_i}$,则有 $r_i^*=\sum\limits_{j=1}^{n}c_{i,j}^*=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{c_{i,j}r_j}{r_i}=\sum\limits_{j=1}^{n}t_{i,j}r_j$. 又 $\sum\limits_{j=1}^{n}t_{i,j}=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{c_{i,j}}{r_i}=\dfrac{1}{r_i}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{i,j}=1$, 故 $R-r_i^*=R\sum\limits_{j=1}^{n}t_{i,j}-\sum\limits_{j=1}^{n}t_{i,j}r_j=\sum\limits_{j=1}^{n}t_{i,j}(R-r_j)\ge m\sum\limits_{j=1}^{n}(R-r_j)=m(nR-\sum\limits_{j=1}^{n}r_j)=mn(R-\overline{r})$, $r_i^*-r=\sum\limits_{j=1}^{n}t_{i,j}r_j-r\sum\limits_{j=1}^{n}t_{i,j}=\sum\limits_{j=1}^{n}t_{i,j}(r_j-r)\ge m\sum\limits_{j=1}^{n}(r_j-r)=mn(\overline{r}-r)$. 因此, $r+mn(\overline{r}-r)\le r^*\le r_i^*\le R^*\le R-mn(R-\overline{r})$,有 $R^*-r^*\le R-mn(R-\overline{r})-r-mn(\overline{r}-r)=R-r-mn(R-r)=(1-mn)(R-r)$. 证毕.

定理 2 假设 $\mathrm{C}_0=(c_{i,j}^0)_{n\times n}$是正矩阵,令 $\mathrm{C}_{k+1}=\mathrm{D}_k^{-1}\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$. 其中, $\mathrm{D}_k=\mathrm{diag}(\dfrac{r_1^k}{R^k},\dfrac{r_2^k}{R^k},\cdots,\dfrac{r_n^k}{R^k})$, $k=0,1,2,\cdots$, r_i^k 是 C_k 中第 i 行行和, $i=1,2,\cdots,n$; $r^k=\min\limits_i r_i^k$; $R^k=\max\limits_i r_i^k$,则有

$$r^k\le r^{k+1}\le\rho(\mathrm{C}_0)\le R^{k+1}\le R^k,\qquad k=0,1,2,\cdots,\tag{1}$$

$$r^0\le r^1\le\cdots\le r^k\le r^{k+1}\le\rho(\mathrm{C}_0)\le R^{k+1}\le R^k\le\cdots\le R^1\le R^0,\qquad k=0,1,2,\cdots.\tag{2}$$

证明 由于 $\mathrm{C}_{k+1}=\mathrm{D}_k^{-1}\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$,故 $r_i^{k+1}=\sum\limits_{j=1}^{n}c_{i,j}^{k+1}=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{r_j^k}{r_i^k}c_{i,j}^k=\dfrac{1}{r_i^k}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{i,j}^k r_j^k(i=1,2,\cdots,n)$, $r^k=\dfrac{r^k}{r_i^k}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{i,j}^k=\dfrac{1}{r_i^k}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{i,j}^k r^k\le\dfrac{1}{r_i^k}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{i,j}^k r_j^k=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{r_j^k}{r_i^k}c_{i,j}^k=r_i^{k+1}(i=1,2,\cdots,n)$.

同理, $r_i^{k+1}\le R^k(i=1,2,\cdots,n)$,所以, $r^k\le r_i^{k+1}\le R^k(i=1,2,\cdots,n)$, $r^k\le r_i^{k+1}\le R^{k+1}\le R^k$. 由于 C_{k+1} 与 C_0 相似,故 $\rho(\mathrm{C}_{k+1})=\rho(\mathrm{C}_0)$. 利用 Frobenius 定理可得 $r_i^{k+1}\le\rho(\mathrm{C}_{k+1})\le R^{k+1}$,从而 $r^k\le r_i^{k+1}\le\rho(\mathrm{C}_0)\le R^{k+1}\le R^k(k=0,1,2,\cdots)$,由式(1)易得式(2)成立.

定理 3 假设 $\mathrm{C}_0=(c_{i,j}^0)_{n\times n}$是正矩阵,令 $\mathrm{C}_{k+1}=\mathrm{D}_k^{-1}\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$. 其中, $\mathrm{D}_k=\mathrm{diag}(\dfrac{r_1^k}{R^k},\dfrac{r_2^k}{R^k},\cdots,\dfrac{r_n^k}{R^k})$, $k=0,1,2,\cdots$; r_i^k 是 C_k 中第 i 行行和, $i=1,2,\cdots,n$; $r^k=\min\limits_i r_i^k$; $R^k=\max\limits_i r_i^k$,则对于任意 k 次迭代,有

$$c_{i,j}^k\ge(\min c_{i,j}^0)^2/R^0,\qquad\forall i,j=1,2,\cdots,n;\quad k=0,1,2,\cdots.$$

证明 由于 $\mathrm{C}_k=\mathrm{D}_{k-1}^{-1}\mathrm{C}_{k-1}\mathrm{D}_{k-1}=\mathrm{D}_{k-1}^{-1}\mathrm{D}_{k-2}^{-1}\cdots\mathrm{D}_0^{-1}\mathrm{C}_0\mathrm{D}_0\cdots\mathrm{D}_{k-2}\mathrm{D}_{k-1}(k=1,2,\cdots)$,则有 $c_{i,j}^k=\dfrac{r_j^0r_j^1\cdots r_j^{k-1}}{r_i^0r_i^1\cdots r_i^{k-1}}c_{i,j}^0$. 由定理 2 可得, $r_i^k\le R^k\le\cdots\le R^0(\forall i=1,2,\cdots,n,k=1,2,\cdots)$,从而 $\sum\limits_{j=1}^{n}c_{i,j}^k\le R^0(\forall i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots)$. 因此, $c_{i,j}^k\le R^0(\forall i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots)$; $\dfrac{r_j^0r_j^1\cdots r_j^{k-1}}{r_i^0r_i^1\cdots r_i^{k-1}}\le\dfrac{R^0}{c_{i,j}^0}\le\dfrac{R^0}{\min c_{i,j}^0}(\forall i,j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots)$; $\dfrac{r_i^0r_i^1\cdots r_i^{k-1}}{r_j^0r_j^1\cdots r_j^{k-1}}\ge\dfrac{\min c_{i,j}^0}{R^0}(\forall i,j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots)$; $c_{i,j}^k=c_{i,j}^0\dfrac{\min c_{i,j}^0}{R^0}\ge\dfrac{(\min c_{i,j}^0)^2}{R^0}(\forall i,j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots)$. 当 $k=0$ 时,由于 $c_{i,j}^0R^0\ge(\min c_{i,j}^0)^2$,因此, $c_{i,j}^0\ge\dfrac{(\min c_{i,j}^0)^2}{R^0}$也成立. 定理得证.

定理 4 假设 $\mathrm{C}_0=(c_{i,j}^0)_{n\times n}$是正矩阵,令 $\mathrm{C}_{k+1}=\mathrm{D}_k^{-1}\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$. 其中, $\mathrm{D}_k=\mathrm{diag}(\dfrac{r_1^k}{R^k},\dfrac{r_2^k}{R^k},\cdots,\dfrac{r_n^k}{R^k})$, $k=0,1,2,\cdots$; r_i^k 是 C_k 中第 i 行行和, $i=1,2,\cdots,n$; $r^k=\min\limits_i r_i^k$, $R^k=\max\limits_i r_i^k$. 对于 r^k, R^k,有

$$\lim_{k\to\infty}r^k=\lim_{k\to\infty}R^k=\rho(\mathrm{C}_0)=\lim_{k\to\infty}[(R^k+r^k)/2].$$

证明 记 $t_{i,j}^k=\dfrac{c_{i,j}^k}{r_i^k}$, $m^k=\min\limits_{i,j}t_{i,j}^k$,由 $t_{i,j}^k=\dfrac{c_{i,j}^k}{r_i^k}\ge\dfrac{c_{i,j}^k}{R^0}\ge\dfrac{(\min c_{i,j}^0)^2}{(R^0)^2}(\forall i,j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots)$,有 $m^k\ge(\dfrac{\min c_{i,j}^0}{R^0})^2=\alpha>0(k=1,2,\cdots)$.

由定理 1 可知, $R^1-r^1\le(1-m^0n)(R^0-r^0)$, $R^2-r^2\le(1-m^1n)(R^1-r^1)$, $\cdots$, $R^k-r^k\le(1-m^{k-1}n)(R^{k-1}-r^{k-1})$,故有 $R^k-r^k\le(1-m^0n)(1-m^1n)\cdots(1-m^{k-1}n)(R^0-r^0)\le(1-m^0n)(1-\alpha n)^{k-1}(R^0-

r^0)，易证$|1-\alpha_n|<1$. 所以，可得$\lim\limits_{k\to\infty}(R^k-r^k)=0$.

由定理 2 可知，$\lim\limits_{k\to\infty} r^k$ 与$\lim\limits_{k\to\infty} R^k$ 均存在，且有$\lim\limits_{k\to\infty} r^k \le \rho(C_0) \le \lim\limits_{k\to\infty} R^k$，从而有

$$\lim_{k\to\infty} r^k = \lim_{k\to\infty} R^k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{R^k+r^k}{2}\right) = \rho(C_0).$$

定理 5　设 C_0 是正矩阵，$\rho(C_0)$ 是 C_0 的谱半径，则 $X=(\lim\limits_{k\to\infty}(D_0D_1\cdots D_k))e$ 是 C_0 对应于 $\rho(C_0)$ 的特征向量，其中 $e=(1,1,\cdots,1)^T$.

证明　由迭代 D_k 的定义可知，$\lim\limits_{k\to\infty} D_0D_1\cdots D_k$ 存在，从而$\lim\limits_{k\to\infty}(D_0D_1\cdots D_k)^{-1}C_0(D_0D_1\cdots D_k)$存在，且$\lim\limits_{k\to\infty} C_{k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}(D_0D_1\cdots D_k)^{-1}C_0(D_0D_1\cdots D_k)$. 由定理 4 可得，当 $k\to\infty$时，C_{k+1}各行和的极限为$\rho(C_0)$，从而 e 为$\lim\limits_{k\to\infty} C_{k+1}$的对应于$\rho(C_0)$的特征向量，e 为$\lim\limits_{k\to\infty}(D_0D_1\cdots D_k)^{-1}C_0(D_0D_1\cdots D_k)$的对应于$\rho(C_0)$的特征向量，故 $X=(\lim\limits_{k\to\infty}(D_0D_1\cdots D_k))e$ 为 C_0 对应于$\rho(C_0)$的特征向量.

3　数值试验

以 $C=\begin{bmatrix}2&3&8&4\\5&2&6&3\\9&5&7&3\\6&1&8&2\end{bmatrix}$ 为例，由所设计的算法求得其结果，如表 1 所示.

表 1　数值试验结果表

Tab. 1　Table of mumerical experiment result

n	7	11	6	21
精度	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
λ	19.455 397 458 084 47	19.455 449 783 170 45	19.455 449 903 408 56	19.455 449 903 347 95
e	0.696 307 349 740 86 0.639 281 867 998 06 0.928 756 456 680 83 0.701 624 760 546 14	0.696 306 634 907 11 0.639 279 615 348 76 0.928 752 106 719 27 0.701 622 492 808 16	0.696 306 633 262 19 0.639 279 610 146 93 0.928 752 096 679 82 0.701 622 487 588 35	0.696 306 633 258 40 0.639 279 610 145 31 0.928 752 096 678 71 0.701 622 487 586 32

参考文献：

[1]　蒋正新，施国梁. 矩阵理论及其应用[M]. 北京：北京航空学院出版社，1988：359.

[2]　章伟，黄廷祝. 不可约 *M*-矩阵最小特征值的估计[J]. 工程数学学报，2004，21(8)：31-34.

[3]　段复建，张可村. *Z*-矩阵最小特征值及特征向量的数值算法[J]. 工程数学学报，2007，24(3)：563-566.

[4]　徐成贤，徐宗本. 矩阵分析[M]. 西安：西北工业大学出版社，1991：270-309.

[5]　宋海洲. 关于合同变换矩阵的一般形式[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2004，25(2)：130-132.

A New Algorithm for the Spectral Radius and Its Eigenvector of Positive Matrix

XU Qiang，SONG Hai-zhou，TIAN Zhao-wei

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract :　A new algorithm for the spectral radius and its eigenvector of positive matrix is designed, and the convergence of the algorithm for this algorithm is also proved. The results show that the algorithm has the characteristic of small calculate amounts , easy to achieve, and can reach the required precision rapidly. The feasibility of the algorithm is also proved by numerical experiment.

Keywords :　positive matrix; spectral radius; eigenvector; convergence

(责任编辑：陈志贤　　英文审校：张金顺，黄心中)