

文章编号: 1000-5013(2010)04-0404-04

# 时域多分辨小波的交替隐式差分方法

汤 伟

( 华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 采用 Harr 尺度和小波函数为空间场量展开函数, 得到时域多分辨小波( MRTD) 步进方程, 并与交替隐式差分( ADI-FDTD) 结合, 导出 ADI-MRTD 融合步进方程. 场量迭代的核心转化为分块三对角矩阵线性方程组, 提出广义追赶法进行高效求解, 讨论连接边界条件的处理, 使该方法能够有效地模拟散射问题. 以一维问题为例, 验证 ADI-MRTD 融合技术的计算精度和有效性.

关键词: Harr 尺度; 小波函数; 时域多分辨; 交替隐式差分

中图分类号: O 241; TN 011

文献标识码: A

时域有限差分( FDTD) 方法已广泛应用于天线、散射和电磁兼容等问题的模拟与分析<sup>[1-2]</sup>. FDTD 方法受 CFL( Courant-Friedrich-Lecy) 稳定性和空间色散条件的限制, 时间和空间步长均不能选取太大, 使得该方法存在计算效率不高的缺陷. 因此, 有些融合其他技术的新方法, 如伪谱时域差分方法( PSTD)<sup>[3-4]</sup>、时域多分辨小波( MRTD)<sup>[5-6]</sup> 及交替隐式差分方法( ADI-FDTD)<sup>[7-8]</sup> 等被相继提出. PSTD 和 MRTD 是通过优化空间色散关系提高空间采样率, 而 ADI-FDTD 时间色散关系则是与时间步长非相关的. MRTD 灵活的空间抽样, 使其和 ADI-FDTD 结合, 使得改善空间分辨率和减小运算量成为可能. Chen 等<sup>[9]</sup> 最早提出这一思想, 从理论上对其稳定性给予证明, 并通过谐振腔模分量结果给出相对误差. 王丽华等<sup>[10]</sup> 利用 Daubechies 基重新推导时间无关的稳定性证明. 相比对 MRTD 和 ADI-MRTD 的研究, 这一混合方法迄今仍然没有取得较大的进展. 本文采用 Harr 尺度和小波函数作为空间场量的展开函数, 得到矩阵形式的 MRTD 步进方程, 结合 ADI-FDTD 方法并导出 ADI-MRTD 方法步进方程.

## 1 基于 Harr 小波的 MRTD 方程

采用 Harr 尺度函数和小波函数作为空间场量的展开函数, 可将 MRTD 方程改写为<sup>[9]</sup>

$$\mathbf{E}_m^{k+1} = \mathbf{S}_m^E \mathbf{E}_m^k - (\alpha_m^E \mathbf{H}_m^{k+0.5} - \beta_m^E \mathbf{H}_m^{k-0.5}), \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_m^{k+0.5} = \mathbf{S}_m^H \mathbf{H}_m^{k-0.5} - (\alpha_m^H \mathbf{E}_m^{k+1} - \beta_m^H \mathbf{E}_m^k). \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{E}_m^k = \begin{bmatrix} E_x^k(m) \\ E_y^k(m) \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{H}_m^k = \begin{bmatrix} H_x^k(m+1/4) \\ H_y^k(m+1/4) \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{S}_m^E = \left( \epsilon_{(m)} + \frac{\Delta t}{2\epsilon_0} \sigma_{(m)} \right)^{-1} \left( \epsilon_{(m)} - \frac{\Delta t}{2\epsilon_0} \sigma_{(m)} \right)^{-1}$ ;  $\alpha_m^E = \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta s} \times \left( \epsilon_{(m)} + \frac{\Delta t}{2\epsilon_0} \sigma_{(m)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ;  $\beta_m^E = \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta s} \left( \epsilon_{(m)} + \frac{\Delta t}{2\epsilon_0} \sigma_{(m)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{S}_m^H = \left( \mu_{(m)} + \frac{\Delta t}{2\mu_0} \sigma_{(m)}^* \right)^{-1} \times \left( \mu_{(m)} - \frac{\Delta t}{2\mu_0} \sigma_{(m)}^* \right)^{-1}$ ;  $\alpha_m^H = \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta s} \left( \mu_{(m)} + \frac{\Delta t}{2\mu_0} \sigma_{(m)}^* \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $\beta_m^H = \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta s} \left( \mu_{(m)} + \frac{\Delta t}{2\mu_0} \sigma_{(m)}^* \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ;  $E$

和  $H$  分别表示电场和磁场的 Harr 尺度函数系数;  $e$  和  $h$  分别为电场和磁场的 Harr 小波函数系数;  $\sigma_m$  和  $\sigma_m^*$  为电导率和磁导率矩阵, 具体表达式参见文[11].

## 2 ADI-FDTD 和 MRTD 融合技术

利用一维 ADI-FDTD 方程<sup>[12]</sup>, 与式(1)、(2)相结合, 整理可分别得到如下 2 个时间分步.

收稿日期: 2008-09-28

通信作者: 汤伟(1974), 男, 副教授, 主要从事电磁场数值算法的研究. E-mail: tangwei74@hqu.edu.cn.

基金项目: 华侨大学高层次人才科研启动项目(08BS411).

(1) 第 1 时间分步:

$$\mathbf{E}_m^{k+, 0.5} = \mathbf{S}_m^E \mathbf{E}_m^k - (\alpha_m^E \mathbf{H}_m^{k+, 0.5} - \beta_m^E \mathbf{H}_{m-1}^{k+, 0.5}), \tag{3}$$

$$\mathbf{H}_m^{k+, 0.5} = \mathbf{S}_m^H \mathbf{H}_m^k - (\alpha_m^H \mathbf{E}_{m+1}^{k+, 0.5} - \beta_m^H \mathbf{E}_m^{k+, 0.5}). \tag{4}$$

(2) 第 2 时间分步:

$$\mathbf{E}_m^{k+, 1} = \mathbf{S}_m^E \mathbf{E}_m^{k+, 0.5} - (\alpha_m^E \mathbf{H}_m^{k+, 0.5} - \beta_m^E \mathbf{H}_{m-1}^{k+, 0.5}), \tag{5}$$

$$\mathbf{H}_m^{k+, 1} = \mathbf{S}_m^H \mathbf{H}_m^{k+, 0.5} - (\alpha_m^H \mathbf{E}_m^{k+, 0.5} - \beta_m^H \mathbf{E}_m^{k+, 0.5}). \tag{6}$$

将式(1), (2)的条件  $\Delta t$  替换成  $\Delta t/2$ , 可直接得到式(3)~(6)中的对应系数表达式. 式(3), (4)中出现了同时刻场量  $\mathbf{E}_m^{k+, 0.5}$  和  $\mathbf{H}_m^{k+, 0.5}$ . 采用 ADI-FDTD 中处理方法, 先写出  $\mathbf{H}_{m-1}^{k+, 0.5}$  迭代公式

$$\mathbf{H}_{m-1}^{k+, 0.5} = \mathbf{S}_{m-1}^H \mathbf{H}_{m-1}^k - (\alpha_{m-1}^H \mathbf{E}_m^{k+, 0.5} - \beta_{m-1}^H \mathbf{E}_{m-1}^{k+, 0.5}). \tag{7}$$

与式(4)一起代入式(3), 消去时刻磁场分量, 可得

$$\mathbf{K}_{-1}^m \mathbf{E}_{m-1}^{k+, 0.5} + \mathbf{K}_0^m \mathbf{E}_m^{k+, 0.5} + \mathbf{K}_1^m \mathbf{E}_m^{k+, 0.5} = \mathbf{R}_m^k, \tag{8}$$

其中:  $\mathbf{K}_{-1}^m = -\beta_m^E \beta_{m-1}^H$ ;  $\mathbf{K}_0^m = \mathbf{I} + (\alpha_m^E \beta_m^H + \beta_m^E \alpha_{m-1}^H)$ ;  $\mathbf{K}_1^m = -\alpha_m^E \alpha_m^H$ ;  $\mathbf{R}_m^k = \mathbf{S}_m^E \mathbf{E}_m^k + \alpha_m^E \mathbf{S}_m^H \mathbf{H}_m^k + \beta_m^E \mathbf{S}_{m-1}^k \mathbf{H}_{m-1}^k$ . 式(8)涉及 3 个未知场量, 但注意到它们在  $z$  轴排成一线, 沿  $z$  轴写出系列方程, 并附加吸收边界条件, 则可合并成一个线性方程组. 由于式(8)中  $\mathbf{K}$  元素为  $2 \times 2$  矩阵, 该线性方程组系数矩阵为分块三对角矩阵, 故采用广义追赶法对分块三对角矩阵进行求解.

设矩阵方程  $\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{V}$ , 其中  $\mathbf{M}$  为三对角矩阵, 则有

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{C}_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{A}_n & \mathbf{B}_n \end{bmatrix}. \tag{9}$$

式(9)中:  $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$  均为  $m$  阶方阵, 采用 Harr 小波基时,  $m=2$ . 矩阵  $\mathbf{M}$  通过  $LU$  分解, 可以得到

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{b}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{b}_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{A}_n & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{c}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & \mathbf{c}_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{I} & \mathbf{c}_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中,  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{B}_1, \mathbf{c}_k = \mathbf{b}_{k-1}^{-1} \mathbf{C}_k, \mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{c}_k, k=1, 2, \dots, n-1$ . 此时, 原方程等价于  $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{V}$  和  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . 采用广义追赶法求解, 即广义追过程为

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{b}_1^{-1} \cdot \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{y}_i = \mathbf{b}_i^{-1} \cdot (\mathbf{V}_i - \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{y}_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n; \tag{11}$$

而广义赶过程为

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n, \quad \mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j - \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{x}_{j+1}, \quad j = n-1, \dots, 1. \tag{12}$$

式(11), (12)中出现了矩阵求逆, 由于分块矩阵均为 2 阶方阵, 求逆过程并不会占用太多计算时间.

为使 ADI-FDTD 和 MRTD 融合技术能有效解决实际问题, 采用类似于 FDTD 和 ADI-FDTD<sup>[10]</sup> 中的总场法. 以一维情况为例, 可推出总场区与散射场区交界处的 4 个连接边界条件. (a)  $m = N_{cmin} - 1, \mathbf{R}_m^k = \mathbf{S}_m^E \mathbf{E}_m^k + \alpha_m^E \mathbf{S}_m^H \mathbf{H}_m^k + \beta_m^E \mathbf{S}_{m-1}^k \mathbf{H}_{m-1}^k + \mathbf{K}_{-1}^m \mathbf{E}^{inc}(m+1; k+0.5)$ . (b)  $m = N_{cmin}, \mathbf{R}_m^k = \mathbf{S}_m^E \mathbf{E}_m^k + \alpha_m^E \mathbf{S}_m^H \mathbf{H}_m^k + \beta_m^E \mathbf{S}_{m-1}^k \mathbf{H}_{m-1}^k + \beta_m^E [\alpha_{m-1}^H \mathbf{E}^{inc}(m; k+0.5) + \mathbf{H}^{inc}(m+1; k+0.5)]$ . (c)  $m = N_{cmax}, \mathbf{R}_m^k = \mathbf{S}_m^E \mathbf{E}_m^k + \alpha_m^E \mathbf{S}_m^H \mathbf{H}_m^k + \beta_m^E \mathbf{S}_{m-1}^k \mathbf{H}_{m-1}^k + \alpha_m^E [\beta_m^H \mathbf{E}^{inc}(m; k+0.5) - \mathbf{H}^{inc}(m; k+0.5)]$ . (d)  $m = N_{cmax} + 1, \mathbf{R}_m^k = \mathbf{S}_m^E \mathbf{E}_m^k + \alpha_m^E \mathbf{S}_m^H \mathbf{H}_m^k + \beta_m^E \mathbf{S}_{m-1}^k \mathbf{H}_{m-1}^k + \mathbf{K}_{-1}^m \mathbf{E}^{inc}(m-1; k+0.5)$ .

4 个连接边界条件中,  $N_{cmin}, N_{cmax}$  分别代表右、左连接边界点; 入射波场量( $\mathbf{E}^{inc}$  和  $\mathbf{H}^{inc}$ ) 为列向量, 其元素分别为相应位置和时间上入射波的 Harr 尺度函数和小波函数分量.

### 3 数值算例

定义 CFL 约束条件参量  $\alpha_{CFL} = c\Delta t/\Delta s$  ( $c$  为自由空间光速), 一维 FDTD 方法约束条件要求  $\alpha_{CFL} <$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1, 选用入射波为时域高斯脉冲, 以提取结构的频域特性.

例 1 无耗介质板的反射系数( $\rho_R$ )和透射系数( $\rho_T$ ). 介质板厚度  $d=9\text{ cm}$ , 介电常数  $\varepsilon=4$ . 选取 ADI-MRTD 空间步长  $\Delta s=1.5\text{ mm}$ , 时间步长  $\Delta t$  通过  $\alpha_{\text{CFL}}$  定义来设定, 例 1 选择  $\alpha_{\text{CFL}}=5$ . 介质板反射系数和透射系数数值结果与解析解的对比, 结果如图 1(a) 所示. 结果表明, 当设定的  $\alpha_{\text{CFL}}$  参数远远超过 FDTD 的约束条件, 也即时间步长远超过 FDTD 的取值范围, 与解析方法的计算结果相比, 在  $0\sim 5\text{ GHz}$  范围内几乎重合. 由此可以看到, 该方法对这类无耗媒质的适用性.

例 2 有耗介质板的反射和透射系数. 介质板厚度同例 1, 介电参数为  $\varepsilon=2, \sigma=0.01\text{ s}\cdot\text{m}^{-1}$ . ADI-MRTD 的计算参数选取与例 1 相同, 反射系数和透射系数的数值结果与解析解之间的对比, 结果如图 1(b) 所示. 与无耗介质板相比, 有耗介质平板的反射系统随频率增加呈减小趋势, 透射系数在  $0\sim 5\text{ GHz}$  范围内基本保持不变. 对比算例 1 可以看到, 介质对电磁波的吸收作用.

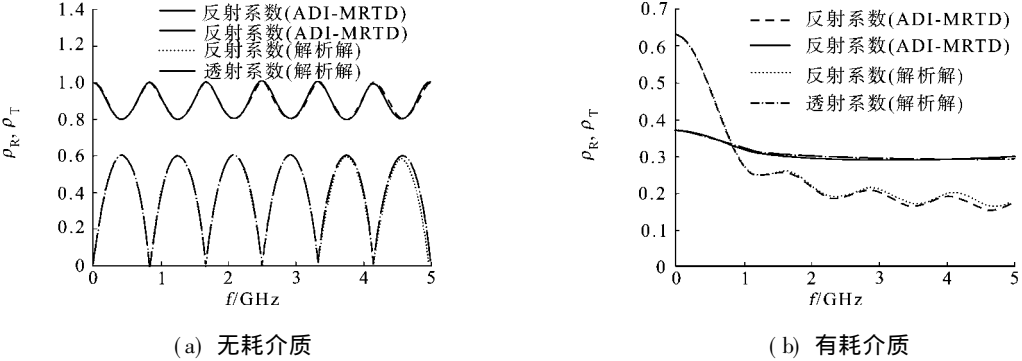


图 1 反射系数和透射系数随频率的变化

Fig. 1 Reflection and transmission coefficient changes with the frequency

例 3 一维光带隙(PBG)结构的频率响应. 一维 PBG 结构由两种无耗媒质构成, 如图 2 所示. 图 2 中, 媒质 1(深色)介电常数  $\varepsilon_1=9$ , 共有 7 层且每层厚度  $d_1=7.5\text{ cm}$ ; 媒质 2(浅色)介电常数  $\varepsilon_2=1$ , 与媒质 1 相间排列, 厚度  $d_2=22.5\text{ cm}$ . 采用 ADI-MRTD 和 FDTD 方法, 对该 PBG 结构的频率响应进行数值模拟, 结果如图 3 所示. 图 3 中, FDTD 的空间步长  $\Delta s=3.75\text{ mm}$ ,  $\alpha_{\text{CFL}}=0.5$ ; ADI-MRTD 的空间步长与 FDTD 相同而  $\alpha_{\text{CFL}}=5$ .

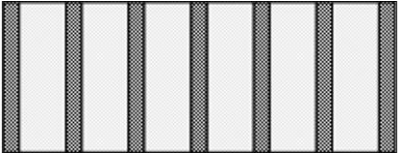


图 2 一维光带隙结构示意图

Fig. 2 Schematic one dimensional photonic bandgap structure

计算结果表明, 结构在  $250\sim 450\text{ MHz}$  频段内, 入射波被 PBG 结构反射, 传输系数趋于 0, 使得该结构对  $250\sim 450\text{ MHz}$  的电波形成传输禁带. 图 1(a), (b) 和图 3 的结果表明, ADI-FDTD 和 MRTD 融合技术具有较高的计算精度. 这种计算精度是在  $\alpha_{\text{CFL}}=5$  条件下得到的, 是传统 FDTD 约束条件( $\alpha_{\text{CFL}}=0.5$ )的 10 倍. 也即是说, 在相同计算资源情况下, ADI-MRTD 运行时间步数仅为传统 FDTD 的  $1/10$ , 有效地提高了计算效率.

虽然 ADI 技术使得迭代与时间步长无关, 但仍依据计算频带最高频率与时间抽样频率的关系, 即时间抽样必须满足 Nyquist 抽样频率<sup>[13]</sup>. 同时, 与传统的 FDTD, MRTD 和 ADI-FDTD 方法相比, ADI-MRTD 方法的编程复杂程度有了很大的增加. 究其原因在于, ADI-MRTD 方法中步进方程参量都是以矩阵形式出现的.

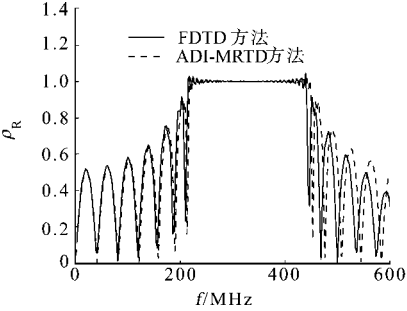


图 3 PBG 的反射系数随频率的响应

Fig. 3 Photonic bandgap of the reflection coefficient with frequency response

4 结束语

ADI-FDTD 和 MRTD 融合技术保持 ADI-FDTD 无条件稳定性的同时, 继承了 MRTD 解决多尺度电磁问题的优点. 该技术可以推广到二维和三维情况, 如模拟粗糙表面目标散射问题. 只是在二维和三维问题中, 无论吸收边界还是连接边界条件, 处理过程都比较复杂.

## 参考文献:

- [1] TAFLOVE A, HAGNESS S C. Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method[M]. London: Artech House, 2000.
- [2] 汤炜, 李清亮, 吴振森. 有耗平面和三维目标复合散射 FDTD 分析[J]. 电波科学学报, 2004, 19(4): 38-443.
- [3] LIU Q H. The PSTD algorithm: A Time-domain method requiring only two cells per wavelength[J]. Micro and Opt Tech Lett, 1997, 15(3): 158-165.
- [4] LI Q L, CHEN Y C. Application of the PSTD for scattering analysis[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2002, 50(9): 1317-1319.
- [5] KRUMPHOLZ M, KATEHI L. MRTD: New time-domain schemes based on multiresolution analysis[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1996, 44(4): 555-571.
- [6] DOGARU T, CARIN L. Multiresolution time-domain using CDF biorthogonal wavelets[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2001, 49(5): 902-912.
- [7] NAMIKI T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1999, 47(10): 2003-2007.
- [8] NAMIKI T. 3-D ADF-FDTD method-unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2000, 48(10): 1743-1748.
- [9] CHEN Z Z, ZHANG J Z. An unconditionally stable 3-D ADF-MRTD method free of the CFL stability condition[J]. IEEE Micro Wire Comp Lett, 2001, 11(8): 349-351.
- [10] 王丽华, 吴先良. ADF-MRTD 算法的数值色散性分析[J]. 现代电子技术, 2007, 30(11): 17-20.
- [11] DOGARU T, CARIN L. Application of Harr-wavelet-based multiresolution time-domain schemes to electromagnetic scattering problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2002, 50(6): 774-784.
- [12] 汤炜, 焦培南, 李清亮, 等. ADF-FDTD 方法在一维 PBG 结构中的应用[J]. 电波科学学报, 2003, 18(3): 281-285.
- [13] 汤炜. ADF-FDTD 及其混合算法在电磁散射中的应用[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2005.

## Analysis of the Alternative Direction Implicit Method Based on Multi-Resolution Time-Domain

TANG Wei

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** The paper derives the multi-resolution time-domain (MRTD) update equations adopting the Harr scaling and wavelet function as the expanding basis in space domain. The ADF-MRTD formulae are obtained by combining with the alternative-direction implicit/finite difference time-domain (ADF-FDTD) method. Due to the simplification of Harr wavelet, the field components in ADF-MRTD equation can be updated by the blocked tridiagonal linear equation, which can be evaluated by generalized tridiagonal equation method efficiently. Moreover, this paper discusses the adjacent boundary condition to simulation electromagnetic scattering. Finally, the proposed method is validated by some one-dimension numerical examples.

**Keywords:** Harr scaling; wavelet function; multi-resolution time-domain; alternative-direction implicit/finite difference time-domain

(责任编辑: 鲁斌 英文审校: 吴逢铁)