第31卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 31 No. 3
2010年5月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) May. 2010

文章编号: 1000-5013(2010)03-0356-05

t-结构与心的 Recollement

林增强

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 设三角范畴 $\mathscr{D}$ 允许有关于三角范畴 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 的 Recollement, 给出 $\mathscr{D}$ 中 t-结构能够诱导 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 的 t-结构的充分必要条件. 证明在一定条件下, $\mathscr{D}$ 中 t-结构的心允许有关于 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 的 t-结构的心的 Recollement, 从而由已知三角范畴的 Recollement 构造若干 Abel 范畴的 Recollement.

关键词: 三角范畴; t-结构; 心; Recollement

中图分类号: O 154.1 文献标识码: A

1963年, Verdier 提出了三角范畴的概念及其局部化理论[1], 从此, 三角范畴理论成为代数表示论的研究热点之一. 1982年, Beilinson 等[2] 在研究奇异空间和 Perverse Sheaves 时, 引入了三角范畴 Recollement 的概念, 并将 Abel 范畴中复形的截短概念一般化. 他们在三角范畴 $\mathscr{D}$ 中引入了 t-结构 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 的概念, 并证明了 t-结构的心 $\mathscr{D}^{\leqslant 0} \cap \mathscr{D}^{\geqslant 0}$ 是一个 Abel 范畴, 函子 $\mathscr{D} \to \mathscr{D}^{\leqslant 0} \cap \mathscr{D}^{\geqslant 0}$ 是一个上同调函子[2]. 因此, 三角范畴的 t-结构提供了研究三角范畴的 Abel 子范畴的工具. t-结构在许多数学分支起着重要的作用, 如 Perverse Sheaves, 以及倾斜理论和交换代数等[2-5]. 三角范畴的 Recollement 与 t-结构关系密切. 一方面, 因为 t-结构的概念类似于 Abel 范畴的挠理论[6-7], 对三角范畴的 Recollement 的研究可以归结为 t-结构三元组的研究[8]. 另一方面, 若三角范畴 $\mathscr{D}$ 允许有关于三角范畴 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 的 Recollement, 则 $\mathscr{D}'$ 的 t-结构和 $\mathscr{D}''$ 的 t-结构可以诱导 $\mathscr{D}$ 的 t-结构[2]. 本文研究 $\mathscr{D}$ 的 t-结构能够诱导 $\mathscr{D}'$ 的 t-结构和 $\mathscr{D}''$ 的 t-结构的充分必要条件, 并利用 t-结构这个工具, 由已知的三角范畴的 Recollement 构造了若干 Abel 范畴的 Recollement.

1 t-结构

定义 **1**[2] 假设 $\mathscr{D}$ 是三角范畴, $(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 是 $\mathscr{D}$ 的严格满子范畴对. 对于任意的 $n \in \mathbf{Z}$, 记 $\mathscr{D}^{\leqslant n} = T^{-n}(\mathscr{D}^{\leqslant 0})$, $\mathscr{D}^{\geqslant n} = T^{-n}(\mathscr{D}^{\geqslant 0})$. 如果满足下列3个条件:

(T1) $\mathscr{D}^{\leqslant 0} \subseteq \mathscr{D}^{\geqslant 1}$, $\mathscr{D}^{\geqslant 0} \supseteq \mathscr{D}^{\geqslant 1}$;

(T2) 对任意的 $X \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$, $Y \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, Y) = 0$;

(T3) 对 $\mathscr{D}$ 中任意对象 X, 存在三角 $A \to X \to B \to TX$. 其中: $A \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$; $B \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$.

则称 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 是 $\mathscr{D}$ 的 t-结构, $\mathscr{D}^{\leqslant 0} \cap \mathscr{D}^{\geqslant 0}$ 为 t-结构 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 的心.

例 **1** 设 $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathscr{D} = D^b(\mathscr{A})$. 记

$$\mathscr{D}^{\leqslant 0} = \{X \in \mathscr{D} \mid H^n(X) = 0, \quad 对任意\ n > 0\},$$
$$\mathscr{D}^{\geqslant 0} = \{X \in \mathscr{D} \mid H^n(X) = 0, \quad 对任意\ n < 0\},$$

则 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 是一个 t-结构, 称为导出范畴 $D^b(\mathscr{A})$ 的标准 t-结构, 其心是 Abel 范畴 $\mathscr{A}$.

t-结构有如下常用的基本性质.

引理 **1**[2] 设 $\mathscr{A}$ 是三角范畴 $\mathscr{D}$ 的 t-结构 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 的心, 则对任意的 $n \in \mathbf{Z}$, 有

(1) $(\mathscr{D}^{\leqslant 0})^{\perp} = \mathscr{D}^{\geqslant 1}$, ${}^{\perp}(\mathscr{D}^{\geqslant 1}) = \mathscr{D}^{\leqslant 0}$;

收稿日期: 2008-12-20

通信作者: 林增强(1980-), 男, 讲师, 主要从事代数表示论的研究. E-mail: lzq134@163.com.

基金项目: 华侨大学高层次人才科研启动项目(08BS506)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(2) 嵌入函子 $\mathscr{D}^{\leqslant n}\to\mathscr{D}$ 存在右伴随 $\tau_{\leqslant n}:\mathscr{D}\to\mathscr{D}^{\leqslant n}$；

(3) 嵌入函子 $\mathscr{D}^{\geqslant n}\to\mathscr{D}$ 存在左伴随 $\tau_{\geqslant n}:\mathscr{D}\to\mathscr{D}^{\geqslant n}$；

(4) 对 $\mathscr{D}$ 中任意对象 X，存在三角 $\tau_{\leqslant n}(X)\to X\to\tau_{\geqslant n+1}(X)\to T\tau_{\leqslant n}(X)$；

(5) $H^0=\tau_{\geqslant 0}\tau_{\leqslant 0}:\mathscr{D}\to\mathscr{A}$ 是上同调函子；

(6) $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴.

引理 2[2]　设 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 是三角范畴 $\mathscr{D}$ 的 t-结构，$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{D}$ 的三角子范畴，则下列 3 个条件等价：

(1) $\tau_{\leqslant 0}(\mathscr{U})\subseteq\mathscr{U}$；

(2) $\tau_{\geqslant 0}(\mathscr{U})\subseteq\mathscr{U}$；

(3) $(\mathscr{U}\cap\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{U}\cap\mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 是 $\mathscr{U}$ 的 t-结构.

满足引理 2 等价条件之一的三角子范畴 $\mathscr{U}$ 称为 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 稳定的.

引理 3　设 $\mathscr{D}$ 是三角范畴，$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{D}$ 的有厚度子范畴，$Q:\mathscr{D}\to\mathscr{D}/\mathscr{U}$ 是商函子. 若 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 是 $\mathscr{D}$ 的 t-结构，则 $(Q(\mathscr{D}^{\leqslant 0}),Q(\mathscr{D}^{\geqslant 0}))$ 是 $\mathscr{D}/\mathscr{U}$ 的 t-结构，当且仅当 $\mathscr{U}$ 是 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 稳定的.

定义 2[2]　设 $\mathscr{D},\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 是三角范畴. $\mathscr{D}$ 允许有关于 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 的一个 Recollement，记作

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathscr{D}' \arrow[r, "i_*"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathscr{D}'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd},$$

是指 6 个正合函子 $i_*=i_!:\mathscr{D}'\to\mathscr{D}$，$j^*=j^!:\mathscr{D}\to\mathscr{D}''$，$i^*,i^!:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$，$j_!,j_*:\mathscr{D}''\to\mathscr{D}$ 满足如下 4 个条件.

(R1) (i^*,i_*)，$(i_!,i^!)$，$(j_!,j^!)$，(j^*,j_*) 是伴随对；

(R2) $j^*i_*=0$；

(R3) $i_*,j_!$ 和 j_* 是满嵌入函子；

(R4) 对 $\mathscr{D}$ 中任一对象 X，可以确定两个 $\mathscr{D}$ 中三角，即

$$i_!i^!(X)\xrightarrow{\delta_X}X\xrightarrow{\varepsilon_X}j_*j^*(X)\to T(i_!j^!(X)),$$

$$i_!j^!(X)\xrightarrow{\delta'_X}X\xrightarrow{\varepsilon'_X}i_*i^*(X)\to T(j_!j^!(X)),$$

其中：ε_X 和 ε'_X 是前连接态射；δ_X 和 δ'_X 是后连接态射.

定义 2 中，如果 $\mathscr{D},\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 是 Abel 范畴，它们之间的 6 个函子是加法函子，满足条件(R1)～(R3)，则称 Abel 范畴 $\mathscr{D}$ 允许有关于 Abel 范畴 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 的一个 Recollement.

三角范畴的 Recollement 与 t-结构有如下关系.

引理 4[2]　设三角范畴 $\mathscr{D}$ 允许有关于三角范畴 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 的 Recollement，记作

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathscr{D}' \arrow[r, "i_*"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathscr{D}'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd},$$

则 $\mathscr{D}'$ 的 t-结构 $(\mathscr{D}'^{\leqslant 0},\mathscr{D}'^{\geqslant 0})$ 和 $\mathscr{D}''$ 的 t-结构 $(\mathscr{D}''^{\leqslant 0},\mathscr{D}''^{\geqslant 0})$，可以诱导 $\mathscr{D}$ 的 t-结构 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$，其中

$$\mathscr{D}^{\leqslant 0}=\{X\in\mathscr{D}\mid j^*X\in\mathscr{D}''^{\leqslant 0},\quad i^*X\in\mathscr{D}'^{\leqslant 0}\},$$

$$\mathscr{D}^{\geqslant 0}=\{X\in\mathscr{D}\mid j^*X\in\mathscr{D}''^{\geqslant 0},\quad i^!X\in\mathscr{D}'^{\geqslant 0}\}.$$

引理 4 的逆命题未必成立，即三角范畴 $\mathscr{D}$ 的 t-结构未必能诱导三角范畴 $\mathscr{D}'$ 的 t-结构和 $\mathscr{D}''$ 的 t-结构. 为了给出能够诱导的充要条件，先回顾 t-正合的定义.

定义 3[2]　设 $(\mathscr{C}^{\leqslant 0},\mathscr{C}^{\geqslant 0})$ 和 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 分别是三角范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 的 t-结构，$F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 是正合函子.

(1) 若 $F(\mathscr{C}^{\geqslant 0})\subseteq\mathscr{D}^{\geqslant 0}$，则称 F 是左 t-正合的；

(2) 若 $F(\mathscr{C}^{\leqslant 0})\subseteq\mathscr{D}^{\leqslant 0}$，则称 F 是右 t-正合的；

(3) 若 F 是左 t-正合的和右 t-正合的，则称 F 是 t-正合的.

显然，F 是左 t-正合的当且仅当 $F(\mathscr{C}^{\geqslant 1})\subseteq\mathscr{D}^{\geqslant 1}$.

设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别是三角范畴 $\mathscr{C}$ 的 t-结构 $(\mathscr{C}^{\leqslant 0},\mathscr{C}^{\geqslant 0})$ 和三角范畴 $\mathscr{D}$ 的 t-结构 $(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$ 的心. 如果 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 是正合函子，则可以定义加法函子

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$^{p}F = H^{0}Fi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}.$$

其中：$i : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 是嵌入函子；$H^{0} : \mathscr{D} \to \mathscr{B}$ 是引理1中的上同调函子.

引理5[2] 设$(\mathscr{C}^{\leqslant 0}, \mathscr{C}^{\geqslant 0})$，$(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$和$(\mathscr{E}^{\leqslant 0}, \mathscr{E}^{\geqslant 0})$分别是三角范畴$\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$和$\mathscr{E}$的$t$-结构，而$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，$G : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$和$H : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$是正合函子.

(1) 若F和G左t-正合(或右t-正合)，则GF左t-正合(或右t-正合)，且$^{p}(GF) = {}^{p}G\,{}^{p}F$；

(2) 若(F, H)是伴随对，则F右t-正合当且仅当H左t-正合.

进一步，若F右t-正合或者H左t-正合，则$({}^{p}F, {}^{p}H)$也是伴随对.

定理1 设三角范畴$\mathscr{D}$允许有关于三角范畴$\mathscr{D}'$和$\mathscr{D}''$的Recollement，记作

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}' \arrow[r, "i_*"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathscr{D}''. \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

$(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$是$\mathscr{D}$的$t$-结构，则下列7个条件叙述等价：

(a) $i_* i^*$右t-正合；

(b) $i_* i^!$ 左t-正合；

(c) $(i^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0}), i^!(\mathscr{D}^{\geqslant 0}))$是$\mathscr{D}'$的$t$-结构；

(d) $i_*(\mathscr{D}')$是$(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$稳定的；

(e) $(j^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0}), j^*(\mathscr{D}^{\geqslant 0}))$是$\mathscr{D}''$的$t$-结构；

(f) $j_!\ j^*$右t-正合；

(g) $j_* j^*$左t-正合.

证明 (1) (a)⇒(b). 对任意$X \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$，$Y \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$，由$i_* i^*$右$t$-正合知，$i_* i^* X \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$，因此$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, i_* i^!\ Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(i^* X, i^!\ Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(i_* i^* X, Y) = 0$，根据引理1，有$i_* i^!\ Y \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$.

(2) (b)⇒(c). 对任意$X' \in i^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0})$，有$X' \cong i^* X$. 这里，$X \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$. 因此，有$TX \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$，从而$TX' \cong Ti^* X = i^* TX \in i^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0})$. 故$i^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0}) \subseteq T^{-1} i^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0})$. 类似可证，$i^!(\mathscr{D}^{\geqslant 0}) \supseteq T^{-1} i^!(\mathscr{D}^{\geqslant 0})$. 条件(T1)成立.

对任意$X \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$，$Y \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$，由$i_* i^!$ 左t-正合知$i_* i^!\ Y \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$，故$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(i^* X, i^!\ Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, i_* i^!\ Y) = 0$. 条件(T2)成立.

对任意$X' \in \mathscr{D}'$，存在$\mathscr{D}$中三角$\tau_{\leqslant 0} i_* X' \to i_* X' \to \tau_{\geqslant 1} i_* X' \to T\tau_{\leqslant 0} i_* X'$. 其中：$\tau_{\leqslant 0} i_* X' \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$；$\tau_{\geqslant 1} i_* X' \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$. 用$i^*$作用上述三角，得$\mathscr{D}'$中的三角$i^* \tau_{\leqslant 0} i_* X' \to X' \to i^* \tau_{\geqslant 1} i_* X' \to Ti^* \tau_{\leqslant 0} i_* X'$.

这里，$i^* \tau_{\leqslant 0} i_* X' \in i_*(\mathscr{D}^{\leqslant 0})$. 由于$j^* \tau_{\geqslant 1} i_* X' \cong \tau_{\geqslant 1} j^* i_* X' = 0$，故$\tau_{\geqslant 1} i_* X' \in \mathrm{Ker}(j^*) = \mathrm{Im}(i_*)$. 令$\tau_{\geqslant 1} i_* X' \cong i_* Y'$，其中$Y' \in \mathscr{D}'$，则$i^* \tau_{\geqslant 1} i_* X' \cong Y' \cong i^!\ \tau_{\geqslant 1} i_* X' \in i^!(\mathscr{D}^{\geqslant 1})$. 条件(T3)成立.

(3) (c)⇒(d). 显然i^*是右t-正合的，$i^!$ 是左t-正合的，由引理5可知，i_*是t-正合的.

对于任意的$X' \in \mathscr{D}'$，有$\mathscr{D}'$中的三角$\tilde{\tau}_{\leqslant 0} X' \to X' \to \tilde{\tau}_{\geqslant 1} X' \to T\tilde{\tau}_{\leqslant 0} X'$. 其中：$\tilde{\tau}_{\leqslant 0} X' \in i^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0})$；$\tilde{\tau}_{\geqslant 1} X' \in i^!(\mathscr{D}^{\geqslant 1})$. 用$i_*$作用上面三角，得到$\mathscr{D}$中如下的三角$i_* \tilde{\tau}_{\leqslant 0} X' \to i_* X' \to i_* \tilde{\tau}_{\geqslant 1} X' \to Ti_* \tilde{\tau}_{\leqslant 0} X'$.

由i_*是t-正合的可知，$i_* \tilde{\tau}_{\leqslant 0} X' \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$，$i_* \tilde{\tau}_{\geqslant 1} X' \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$. 故$\tau_{\leqslant 0} i_* X' = i_* \tilde{\tau}_{\leqslant 0} X' \in i_*(\mathscr{D}')$，$i_*(\mathscr{D}')$是$(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$稳定的.

(4) (d)⇒(e). 显然存在三角等价$\varphi : \mathscr{D}/i_*(\mathscr{D}') \to \mathscr{D}''$，使得$j^* = \varphi Q$. 这里$Q : \mathscr{D} \to \mathscr{D}/i_*(\mathscr{D}')$是商函子. 因为$i_*(\mathscr{D}')$是$(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$稳定的，根据引理3，有$(Q(\mathscr{D}^{\leqslant 0}), Q(\mathscr{D}^{\geqslant 0}))$是$\mathscr{D}/i_*(\mathscr{D}')$的$t$-结构，从而有$(j^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0}), j^*(\mathscr{D}^{\geqslant 0}))$是$\mathscr{D}''$的$t$-结构.

(5) (e)⇒(f). 任意给定$X \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$，对任意$Y \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$，有$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(j_!\ j^* X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(j^* X, j^* Y) = 0$，由引理1可知，$j_!\ j^* X \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$.

(6) (f)⇒(g). 对于任意$X \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$，$Y \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$，由$j_!\ j^*$右$t$-正合可知，$j_!\ j^* X \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$，故$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, j_* j^* Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(j^* X, j^* Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(j_!, j^* X, Y) = 0$，根据引理1，有$j_* j^* Y \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$.

(7) (g)⇒(a). 对任意$X \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$，$Y \in \mathscr{D}^{\geqslant 1}$，显然$TX \in \mathscr{D}^{\leqslant 0}$. 用上同调函子$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(-, Y)$作用在三角$j_!\ j^* X \to X \to i_* i^* X \to Tj_!\ j^* X$. 注意到$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, Y) = 0$，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(TX, Y) = 0$，有$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(i_* i^* X, Y) \cong$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(Tj_!\ j^*X,Y)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(j^*TX,j^*Y)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(TX,j_*j^*Y)=0$. 最后一个等号是因为 j_*j^* 左 t-正合. 根据引理 1 可知，$i_*i^*X\in\mathscr{D}^{\leqslant 0}$. 故 i_*i^* 右 t-正合.

2　心的 Recollement

在一定条件下，三角范畴的 Recollement 可以诱导其 t-结构的心的 Recollement.

定理 2　设三角范畴 $\mathscr{D}$ 允许有关于三角范畴 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 的 Recollement，记作

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}' \arrow[r, "i_*"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathscr{D}'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}.$$

其中：$(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$；$(\mathscr{D}'^{\leqslant 0},\mathscr{D}'^{\geqslant 0})$ 和 $(\mathscr{D}''^{\leqslant 0},\mathscr{D}''^{\geqslant 0})$ 分别是 $\mathscr{D},\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 的 t-结构，其心分别记为 $\mathscr{A},\mathscr{A}',\mathscr{A}''$. 若 i_* 和 j^* 都是 t-正合的，则 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 允许有关于 Abel 范畴 $\mathscr{A}'$ 和 $\mathscr{A}''$ 的 Recollement. 记作

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}' \arrow[r, "{}^pi_*"] & \mathscr{A} \arrow[l, bend right, "{}^pi^*"'] \arrow[l, bend left, "{}^pi^!"] \arrow[r, "{}^pj^*"] & \mathscr{A}'' \arrow[l, bend right, "{}^pj_!"'] \arrow[l, bend left, "{}^pj_*"] \end{tikzcd}.$$

证明　因为 i_* 和 j^* 都是 t-正合的，根据引理 5 可知，存在伴随对 $({}^pi^*,{}^pi_*)$，$({}^pi_*,{}^pi_!)$ 和 $({}^pj_!,{}^pj_*)$. 由 $i_*,j_!$ 和 j_* 是满嵌入函子可知，$i^*i_*\cong id,j^*j_!\cong id,j^*j_*\cong id$.

根据引理 5 可知，${}^pi^*{}^pi_*\cong id,{}^pj^*{}^pj_!\cong id,{}^pj^*{}^pj_*\cong id$，因此，${}^pi_*,{}^pj_!$ 和 ${}^pj_*$ 是满嵌入函子. 由于 $j^*i_*=0$，显然有 ${}^pj^*{}^pi_*=0$. 定理得证.

推论 1　设导出范畴 $D^b(\mathscr{A})$ 允许有关于导出范畴 $D^b(\mathscr{B})$ 和 $D^b(\mathscr{C})$ 的 Recollement，记作

$$\begin{tikzcd} D^b(\mathscr{B}) \arrow[r, "i_*"] & D^b(\mathscr{A}) \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & D^b(\mathscr{C}) \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "i_*"] \end{tikzcd}.$$

若 $i_*(\mathscr{B})\subseteq\mathscr{A},j^*(\mathscr{A})\subseteq\mathscr{C}$，则 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 允许有关于 Abel 范畴 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的 Recollement，记作

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "{}^pi_*"] & \mathscr{A} \arrow[l, bend right, "{}^pi^*"'] \arrow[l, bend left, "{}^pi^!"] \arrow[r, "{}^pj^*"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend right, "{}^pj_!"'] \arrow[l, bend left, "{}^pi_*"] \end{tikzcd}.$$

证明　注意到 $D^b(\mathscr{B})$ 中的任意对象都同构于一个有界复形，所以对于任意 $0\neq X\in D^b(\mathscr{B})$，不妨设 $X^m\neq 0$，并且当 $i<m$ 或 $i>n$ 时，$X^i=0$，这里 $m\leqslant n$. 定义 X 的长度，$l(X)=\{i\mid X^i\neq 0\}$. 记 $A=T^{-m}(X^m)$ 是 m 次茎复形，B 是 X 的子复形，使得当 $i\geqslant m+1$ 时，$B^i=X^i$；而当 $i\leqslant m$ 时，$B^i=0$，则有 $D^b(\mathscr{B})$ 中的三角 $A\to X\to B\to TX$. 这里，$l(A)=1,l(B)<l(X)$.

对导出范畴 $D^b(\mathscr{B})$ 的标准 t-结构，若 $X\in D^b(\mathscr{B})^{\leqslant 0}$，则显然 $A,B\in D^b(\mathscr{B})^{\leqslant 0}$，且 $m\leqslant 0$. 因为 $i_*(\mathscr{B})\subseteq\mathscr{A}$，所以 $i_*A=T^{-m}i_*(X^m)\in D^b(\mathscr{A})^{\leqslant 0}$. 由归纳假设可知，$i_*B=\in D^b(\mathscr{A})^{\leqslant 0}$. 因此，在 $D^b(\mathscr{A})^{\leqslant 0}$ 的三角 $i_*A\to i_*X\to i_*B\to Ti_*A$ 中，$i_*X\in D^b(\mathscr{A})^{\leqslant 0}$. 故 i_* 关于标准 t-结构是右 t-正合的. 对偶可证，i_* 关于标准 t-结构是左 t-正合的，从而是 t-正合的. 同理，由 $j^*(\mathscr{A})\subseteq\mathscr{C}$ 可知，j^* 关于标准 t-结构也是 t-正合的. 根据定理 2，结论成立.

推论 2　设三角范畴 $\mathscr{D}$ 允许有关于三角范畴 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{D}''$ 的 Recollement. 记作

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}' \arrow[r, "i_*"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathscr{D}'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "i_*"] \end{tikzcd}.$$

其中：$\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{D}'$ 的 t-结构 $(\mathscr{D}'^{\leqslant 0},\mathscr{D}'^{\geqslant 0})$ 的心；$\mathscr{A}''$ 是 $\mathscr{D}''$ 的 t-结构 $(\mathscr{D}''^{\leqslant 0},\mathscr{D}''^{\geqslant 0})$ 的心. 记 $\mathscr{A}=\{X\in\mathscr{D}\mid j^*X\in\mathscr{A}'',i^*X\in\mathscr{D}'^{\leqslant 0},i^!\ X\in\mathscr{D}'^{\geqslant 0}\}$，则 $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴，并且 $\mathscr{A}$ 允许有关于 $\mathscr{A}'$ 和 $\mathscr{A}''$ 的 Recollement. 记作

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}' \arrow[r, "{}^pi_*"] & \mathscr{A} \arrow[l, bend right, "{}^pi^*"'] \arrow[l, bend left, "{}^pi^!"] \arrow[r, "{}^pj^*"] & \mathscr{A}'' \arrow[l, bend right, "{}^pj_!"'] \arrow[l, bend left, "{}^pj_*"] \end{tikzcd}.$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

证明　根据引理4可知，$\mathscr{D}'$的t-结构$(\mathscr{D}'^{\leqslant 0},\mathscr{D}'^{\geqslant 0})$和$\mathscr{D}''$的$t$-结构$(\mathscr{D}''^{\leqslant 0},\mathscr{D}''^{\geqslant 0})$诱导$\mathscr{D}$的$t$-结构$(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$，并且其心是$\mathscr{A}$. 由$\mathscr{D}^{\leqslant 0}$和$\mathscr{D}^{\geqslant 0}$的定义可知，$j^*$是$t$-正合的，并且$i^*$是右$t$-正合的，$i^!$是左$t$-正合的. 根据引理5可知，$i_*$是$t$-正合的. 因此由定理2，结论成立.

推论3　设三角范畴$\mathscr{D}$允许有关于三角范畴$\mathscr{D}'$和$\mathscr{D}''$的Recollement. 记作

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}' \arrow[r, "i_*"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathscr{D}''. \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "i_*"] \end{tikzcd}$$

若$(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$是$\mathscr{D}$的$t$-结构，且满足定理1中的等价条件之一. 记$\mathscr{A}$是$(\mathscr{D}^{\leqslant 0},\mathscr{D}^{\geqslant 0})$的心，$\mathscr{A}'=i^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0})\cap i^!(\mathscr{D}^{\geqslant 0})$，$\mathscr{A}''=j^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0})\cap j^*(\mathscr{D}^{\geqslant 0})$. 则Abel范畴$\mathscr{A}$允许有关于$\mathscr{A}'$和$\mathscr{A}''$的Recollement，记作

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}' \arrow[r, "{}^p i_*"] & \mathscr{A} \arrow[l, bend right, "{}^p i^*"'] \arrow[l, bend left, "{}^p i^!"] \arrow[r, "{}^p j^*"] & \mathscr{A}''. \arrow[l, bend right, "{}^p j_!"'] \arrow[l, bend left, "{}^p j_*"] \end{tikzcd}$$

证明　根据定理1可知，$(i^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0}),i^!(\mathscr{D}^{\geqslant 0}))$是$\mathscr{D}'$的$t$-结构，$(j^*(\mathscr{D}^{\leqslant 0}),j^*(\mathscr{D}^{\geqslant 0}))$是$\mathscr{D}''$的$t$-结构，显然$i_*$和$j^*$都是$t$-正合的. 由定理2可证，结论成立.

参考文献:

[1] VERDIER J L. Cat gories d riv es, tat 0, SGA 4 $\frac{1}{2}$[M]. Lecture Notes in Math, 1977, 569: 262-311.

[2] BEILINSON A A, BERNSTEIN J, DELIGNE P. Faisceaux pervers[J]. Analyse Et Topologie Sur Les Espaces Singuliers, 1982, 100: 1-172.

[3] KASHIWARA M, SHAPIRA P. Sheaves on manifolds[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[4] KELLER B, VOSSIECK D. Aisles in derived categories[J]. Bull Soc Math Belg, 1988, 40(2): 239-253.

[5] HAPPEL D, REITEN I, SMALO O. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras[M]. Providence: Amer Math Soc, 1996.

[6] DICKSON S E. A torsion theory for abelian categories[J]. Trans Amer Math Soc, 1966, 121(1): 223-235.

[7] BELIGIANNIS A, REITEN I. Homological and homotopical aspects of torsion theories[M]. Providence: Amer Math Soc, 2007.

[8] MIYACHI J. Localization of triangulated categories and derived categories[J]. J Algebra, 1991, 141: 463-483.

t-Structure and Recollement of Hearts

LIN Zeng-qiang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Let $\mathscr{D}$ $\mathscr{D}'$ and $\mathscr{D}''$ be triangulated categories. Suppose $\mathscr{D}$ admits a Recollement relative to $\mathscr{D}'$ and $\mathscr{D}''$. We give some necessary and sufficient criterions for a t-structrue on $\mathscr{D}$ inducing t-structures on $\mathscr{D}'$ and $\mathscr{D}''$. Moreover, we take the advantage of the relationship between a t-structure on $\mathscr{D}$ and t-structures on $\mathscr{D}'$ and $\mathscr{D}''$ to show that the heart of the t-structure on $\mathscr{D}$ admits a Recollement relative to the other two hearts. Thus, we get a few Recollements of abelian categories according to a Recollement of triangulated categories.

Keywords: triangulated category; t-structure; heart; Recollement

(责任编辑: 陈志贤　　英文审校: 张金顺, 黄心中)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net