文章编号:　1000-5013(2010)03-0351-05

调和拟共形映照双曲雅可比的偏差性质

陈行堤

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要:　研究两类调和拟共形映照双曲雅可比和双曲面积的偏差性质,给出上半平面到自身上的欧氏调和拟共形映照双曲雅可比的精确界限,以及达到极值的函数.研究双曲调和拟共形映照双曲雅可比的偏差估计,并应用于两类调和拟共形映照双曲面积的偏差估计.结果表明,这两类调和拟共形照是非爆破的.

关键词:　调和映照; 拟共形映照; 双曲雅可比; 双曲面积
中图分类号:　O 174.55　　　文献标识码:　A

1　基本概念

一个上半平面 H 到自身上的 C^2 同胚映照 f, 被称为 ρ-调和映照. 若它满足 Euler-Lagrange 方程, 即

$$f_{z\bar{z}} + (\log\rho)_w \circ f f_z f_{\bar{z}} = 0. \tag{1}$$

式(1)中: ρ 是一个 H 上的 C^2 正值函数; $w = f(z)$. 一个 H 到自身上的保向同胚映照 f, 被称为 K-拟共形映照. 它满足: (1) f 在 H 上是 ACL 的; (2) 对几乎所有的 $z \in H$, 满足 Beltrami 方程. 即

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z. \tag{2}$$

式(2)中: μ 是一个满足 $\operatorname{ess}\sup_{z\in H}|\mu(z)| = k < 1$ 的可测函数, 且 $k = (K-1)/(K+1)$. 如果一个 ρ-调和映照 f 是 K-拟共形的, 那么, 称其为 ρ-调和 K-拟共形映照; 当 ρ 是一个正常数时, 则称 f 为欧氏调和 K-拟共形映照; 而当 ρ 是 H 上的双曲度量密度函数时, 称 f 为双曲调和 K-拟共形映照.

$(\lambda_H \circ f/\lambda_H) J_f$ 是 H 到自身上的同胚映照 f 在双曲度量意义下的雅可比(简称双曲雅可比), J_f 是 f 在欧氏度量意义下的雅可比(简称欧氏雅可比), λ_H 是 H 上的双曲度量密度函数. 另外, 定义一个可测子集 $E \subset H$ 的双曲面积为 $|E|_{\text{hyp}}$ 为 $\iint_E \lambda_H |dz|^2$.

一个局部单叶解析函数的欧氏雅可比总是正的[1]. Lewy[2] 证明了对于一个局部单叶的保向欧氏调和映照. 这个结论是正确的, 但对一个拟共形映照就未必成立. 如取 $f = z|z|^4$, 则 f 是单位圆盘到自身上的拟共形映照, 其欧氏雅可比在 0 点处为零. Partyka 等[3] 研究了在欧氏度量意义下, 欧氏调和 K-拟共形映照能量密度的偏差性质, 结果隐含着如下定理.

定理 1　给定 $K \geqslant 1$, 如果 f 是单位圆盘 D 到自身上的欧氏调和 K-拟共形映照, 且满足 $f(0) = 0$, 那么有

$$J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \geqslant \frac{\max\{4/\pi^2, L_K^2\}}{K}.$$

其中: L_K 关于 $K \geqslant 1$ 是严格递减函数, 且满足

$$\lim_{K\to 1} L_K = L_1 = 1, \qquad \lim_{K\to+\infty} L_K = 0.$$

研究了上半平面到自身上的欧氏调和 K-拟共形映照类, 证明了其双曲雅可比的精确的上界和下界分别

收稿日期:　2008-10-03
通信作者:　陈行堤(1976-), 男, 讲师, 主要从事函数论的研究. E-mail: chxtt@hqu.edu.cn.
基金项目:　福建省自然科学基金资助项目(S0650019); 华侨大学高层次人才科研启动项目(08BS107)

为 K 和 $1/K$;证明上半平面到自身上的双曲调和 K-拟共形映照类;证明其双曲雅可比的上界和下界估计分别为 $(K+1)^2/4$, $4K/(K+1)^2$. 容易看出,当 $K>1$ 时,有 $(K+1)^2/4K<K$, $4K/(K+1)^2>1/K$.

在欧氏度量意义下,Astala[4] 和 Chen 等[5] 给出了拟共形映照的面积偏差的精确估计. 在双曲度量意义下,Kelingos[6] 首先研究了有界可测子集的情形. Porter 等[7] 构造例子,用于说明存在拟共形映照,使得双曲面积有限的可测子集在其映照下的像具有无限的双曲面积. 因此,对一般可测子集的双曲面积的研究,由于存在爆破现象而比较复杂. 目前,对非爆破的拟共形映照类的已有相关的研究结果[7-10].

2 主要结果及其证明

记上半平面 H 的双曲度量为 $\lambda_H(z)|dz|^2$,则在 Gauss 曲率标准化为 -1 的条件下,有

$$\lambda_H(z)=\frac{1}{y^2},\qquad z=x+iy. \tag{3}$$

为了方便,记 $A_K(z)=(c/K)x+icy+b$, $B_K(z)=cKx+icy+b$. 其中:b, c 是两个实常数,且 $c>0$.

引理 1[11] 如果 $f=u+iv$ 为一个上半平面 H 到自身上的欧氏调和拟共形映照,并且满足标准化条件 $f(\infty)=\infty$. 那么,$v=cy$, c 是一个正常数.

利用上述的引理 1,有

定理 2 如果 f 是一个上半平面 H 到自身上的欧氏调和 K-拟共形映照,那么,不等式

$$\frac{1}{K}\leqslant\frac{\lambda_H\circ f}{\lambda_H}J_f\leqslant K \tag{4}$$

对每个 $z\in H$ 成立. 当且仅当 $f=A_K\circ L$,左边等号成立;当且仅当 $f=B_K\circ L$,右边等号成立. 这里,L 是一个 H 到自身上满足 $L^{-1}(\infty)=f^{-1}(\infty)$ 的共形映照.

证明 假设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是一个上半平面 H 到自身上的欧氏调和 K-拟共形映照,且满足标准化条件 $f(\infty)=-\infty$, $z=x+iy$. 由引理 1 可知,存在一个正常数 c,使得 $f(z)=u(x,y)+icy$,从而有

$$f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y)=\frac{1}{2}[(u_x+c)-iu_y], \tag{5}$$

$$f_{\bar z}=\frac{1}{2}(f_x+if_y)=\frac{1}{2}[(u_x-c)+iu_y], \tag{6}$$

$$J_f=|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2=u_xv_y-u_yv_x=cu_x. \tag{7}$$

因为 f 是 K-拟共形的,所以由式(5),(6)可得

$$|\mu_f|^2=\frac{|f_{\bar z}|^2}{|f_z|^2}=\frac{(u_x-c)^2+u_y^2}{(u_x+c)^2+u_y^2}\leqslant\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^2.$$

经整理,可得

$$\left(u_x-c\frac{K^2+1}{2K}\right)^2+u_y^2\leqslant\left(c\frac{K^2-1}{2K}\right)^2.$$

它隐含着

$$c\frac{1}{K}\leqslant u_x\leqslant cK. \tag{8}$$

根据式(3)和 $\mathrm{Im}\,f=cy$,有

$$\frac{\lambda_H\circ f}{\lambda_H}J_f=\frac{1}{c^2}J_f. \tag{9}$$

由式(7),(8),(9)可得

$$\frac{1}{K}\leqslant\frac{\lambda_H\circ f}{\lambda_H}J_f\leqslant K.$$

假设左边不等式的等号成立,则有 $u_x=c/K$. 因此,存在着一个函数 $\varphi(y)$,满足 $u(x,y)=(c/K)x+\varphi(y)$. 由于 f 是 H 上的欧氏调和映照,可知

$$f_z=\frac{1}{2}[c(1+1/K)-i\varphi'(y)]$$

在 H 上是解析的. 因此, $\phi(y)$ 是一个实常数, 记其为 d. 由式(5), (6) 有

$$|\mu_f|^2 = \left|\frac{f_{\bar z}}{f_z}\right|^2 = \frac{(c/K - c)^2 + d^2}{(c/K + c)^2 + d^2} = \left(\frac{K-1}{K+1}\right)^2.$$

上面等式只有在 $d=0$ 的情形下成立, 从而 $\varphi(y)$ 是一个实常数, 记为 b. 当 f 满足标准化条件 $f(\infty)=\infty$ 时, 不等式(4) 的左边等号当且仅当 $f=A_K$ 时成立. 同理可证明, 当 f 满足标准化条件 $f(\infty)=\infty$ 时, 不等式(4) 的右边等号当且仅当 $f=B_K$ 时成立.

如果 $f(\infty)\neq\infty$, 则存在实轴上的一点 a, 满足 $f(a)=\infty$, 让 L 为一个 H 到自身上满足 $L(a)=\infty$ 的共形映照.

令 $g=f\circ L^{-1}$, 则 g 是一个 H 到自身上的欧氏调和 K-拟共形映照且满足标准化条件 $g(\infty)=\infty$. 从而有

$$1/K \leqslant (\lambda_H(w)/\lambda_H(\zeta))J_g \leqslant K.$$

上式中: $w=f(z)$; $\zeta=L(z)$. 由于 L 是一个 H 到自身上的共形映照, 所以有

$$\lambda_H(L(z))\,|L'(z)|^2 = \lambda_H(z).$$

根据 $J_g = L_f\circ L^{-1}|(L^{-1})'(\zeta)|^2$, 有

$$\frac{\lambda_H(w)}{\lambda_H(z)}J_f = \frac{\lambda_H(w)}{\lambda_H(\zeta)}|(L^{-1})'(\zeta)|^2 J_f = \frac{\lambda_H(w)}{\lambda_H(\zeta)}J_g.$$

因此, 有

$$\frac{1}{K} \leqslant \frac{\lambda_H\circ f}{\lambda_H}J_f \leqslant K,$$

左边的等号当且仅当 $f=A_K\circ L$ 成立, 而右边的等号当且仅当 $f=B_K\circ L$ 成立. 定理 2 证毕.

推论 1　若 f 是一个上半平面 H 到自身上的欧氏调和 K-拟共形映照, 且满足 $f(\infty)=\infty$ 和 $f(i)=i$, 那么有

$$\frac{1}{K} \leqslant J_f \leqslant K$$

对每个 $z\in H$ 成立. 左边等号成立当且仅当 $f=(1/K)x+iy$, 而右边等号成立当且仅当 $f=Kx+iy$.

下面考虑双曲调和 K-拟共形映照的双曲雅可比的偏差估计. 即

引理 2[12]　如果 $\sigma>0$ 是一个上半平面 H 上的 C^2 度量密度函数, 且其 Gauss 曲率满足 $K_\sigma\leqslant -1$, 则 $\sigma\leqslant\lambda_H$.

定理 3[13]　如果 f 是一个上半平面 H 到自身上的双曲调和 K-拟共形映照, 那么有

$$1 \leqslant \frac{\lambda_H\circ f}{\lambda_H}|f_z|^2 \leqslant K \tag{10}$$

对每个 $z\in H$ 成立. 利用引理 2 和定理 2 可得

定理 4　如果 f 是一个上半平面 H 到自身上的双曲调和 K-拟共形映照, 那么不等式

$$\frac{4K}{(K+1)^2} \leqslant \frac{\lambda_H\circ f}{\lambda_H}J_f \leqslant \frac{(K+1)^2}{4K} \tag{11}$$

对每个 $z\in H$ 成立.

证明　令 $\sigma=(1-k^2)\lambda_H\circ f|f_z|^2$, $k=(K-1)/(K+1)$. 由定理 2 可知, 对于任意 $z\in H$, 都有 $|f_z|\neq 0$; 而对于满足 $|f_{\bar z}|\neq 0$ 的点 $z\in H$, 有

$$\Delta\log\sigma = \Delta\log(1-k^2) + \Delta\log(\lambda_H\circ f\,|f_z||f_{\bar z}|) + \Delta\log|f_z| - \Delta\log|f_{\bar z}|. \tag{12}$$

因为 f 是双曲调和的, 所以 $\lambda_H\circ f f_z\overline{f}_z$ 是一个 H 上的解析函数. 从而有

$$\Delta\log(\lambda_H\circ f\,|f_z||f_{\bar z}|) = 0. \tag{13}$$

$$\Delta\log|f_z| = \frac{1}{}\Delta\log(|f_z|^2 = \mathrm{Re}(\Delta\log f_z) = 4\mathrm{Re}\left(\frac{f_{zz\bar z} - f_z - f_{z\bar z}f_{zz}}{(f_z)^2}\right), \tag{14}$$

$$\Delta\log|f_z| = \frac{1}{}\Delta\log(|f_{\bar z}|^2 = \mathrm{Re}(\Delta\log f_{\bar z}) = 4\mathrm{Re}\left(\frac{f_{\bar z\bar z\bar z} - f_{\bar z} - f_{z\bar z}f_{\bar z\bar z}}{(f_{\bar z})^2}\right). \tag{15}$$

根据 $f_{z\bar z} = -(\log\lambda_H)_w\circ f f_z f_{\bar z}$, 可得

$$f_{zz\bar z} - f_z - f_{z\bar z}f_{zz} = -(f_z)^2[(\log\lambda_H)_{ww}\circ f f_z f_{\bar z} + (\log\lambda_H)_{w\bar w}\circ f\,|f_{\bar z}|^2 + (\log\lambda_H)_w\circ f f_{z\bar z}],$$

$$f_{\bar{z}z\bar{z}}-f_{\bar{z}}-f_{z\bar{z}}f_{\bar{z}\bar{z}}=-(f_{\bar{z}})^2[(\log\lambda_H)_{ww}\circ ff_zf_{\bar{z}}+(\log\lambda_H)_{w\bar{w}}\circ f|f_z|^2+(\log\lambda_H)_w\circ ff_{z\bar{z}}].$$

将以上两个等式分别代入关系式(14),(15),则有

$$\Delta\log|f_z|-\Delta\log|f_{\bar{z}}|=-8(\log\lambda_H)_{w\bar{w}}\circ f(|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2).\tag{16}$$

因此,当$|f_{\bar{z}}|\neq0$时,将式(13),(16)代入式(12),可得

$$K_\sigma=\frac{\Delta\log\sigma}{-2\sigma}=\frac{\Delta\log\lambda_H}{-2\lambda_H}\circ f\,\frac{|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2}{(1-k^2)|f_z|^2}=-\frac{1-|\mu|^2}{1-k^2}\leqslant-1.$$

另外,$\Delta\log\sigma$也可表示为

$$\Delta\log\sigma(1-k^2)\lambda_H\circ f|f_z|^2=\Delta\log(1-k^2)+\Delta\log\lambda_H\circ f+\Delta\log|f_z|^2.\tag{17}$$

由式(3)可得,$(\log\lambda_H)_{zz}=-(1/2)\lambda_H$ 成立.利用这个等式,可得

$$\Delta\log\lambda_H\circ f=(\Delta\log\lambda_H\circ f(|f_z|^2+|f_{\bar{z}}|^2)+4\lambda_H\circ f\,\mathrm{Re}(f_zf_{\bar{z}}).\tag{18}$$

又有

$$\Delta\log|f_z|^2=-8\mathrm{Re}[(1/2)\lambda_H)\circ ff_zf_{\bar{z}}+(\Delta\log\lambda_H)_{w\bar{w}}\circ f|f_{\bar{z}}|^2+(\Delta\log\lambda_H)_w\circ ff_{z\bar{z}}].\tag{19}$$

由$f_{z\bar{z}}=-(\Delta\log\lambda_H)_w\circ ff_zf_{\bar{z}}$和$|f_z|\neq0$可知,对满足$|f_{\bar{z}}|=0$的点$z\in H$有$f_{z\bar{z}}=0$.因此,由式(18),(19)可知,式(17)在满足$|f_{\bar{z}}|=0$的点处可简化为

$$\Delta\log(1-k^2)\lambda_H\circ f|f_z|^2=(\Delta\log\lambda_H)\circ f|f_z|^2;$$

而式(17)在满足$|f_{\bar{z}}|=0$的点处,有

$$K_\sigma=\frac{\Delta\log\sigma}{-2\sigma}=\frac{\Delta\log\lambda_H}{-2\lambda_H}\circ f\,\frac{|f_z|^2}{(1-k^2)|f_z|^2}=-\frac{1}{1-k^2}\leqslant-1.$$

因此,对于任意的$z\in H$,都有$K_\sigma\leqslant-1$.

由引理3,有

$$\frac{\lambda_H\circ f}{\lambda_H}|f_z|^2\leqslant\frac{(K+1)^2}{4K}.\tag{20}$$

结合定理3的左边不等式和关系式,由$J_f\geqslant(1-k^2)|f_z|^2$可知,式(11)的左边不等式对任意的$z\in H$也成立.

利用双曲调和拟共形映照的共形不变性[5],定理3对任意的单连通区域结论都成立.Yao[14]改进了定理3的右边不等式为

$$(\lambda_H\circ f/\lambda_H)|f_z|^2\leqslant(K+1)/2,$$

而式(20)改进了文[14]的结果.从定理4可看出,H上的双曲调和拟共形映照双曲雅可比的偏差比欧氏调和拟共形映照的要小.

3 主要结果的应用

定理5 如果f是一个上半平面H到自身上的欧氏调和K-拟共形映照,那么,对于任意的可测集合$E\subset H$,有

$$\frac{1}{K}|E|_{\mathrm{hyp}}\leqslant|f(E)|_{\mathrm{hyp}}\leqslant K|E|_{\mathrm{hyp}},\tag{21}$$

而且,其上界和下界的估计是精确的.

证明 设f是一个上半平面H到自身上的欧氏调和K-拟共形映照,则由定理2有

$$\frac{1}{K}|E|_{\mathrm{hyp}}\leqslant|f(E)|_{\mathrm{hyp}}=\iint_E\frac{\lambda_H\circ f}{\lambda_H}J_f\lambda_H\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant K|E|_{\mathrm{hyp}}.$$

如果$f(z)=Kx+\mathrm{i}y$,$z=x+\mathrm{i}y$,则对任意的可测集合$E\subset H$,有$(\lambda_H\circ f/\lambda_H)J_f\equiv K$,从而有

$$|f(E)|_{\mathrm{hyp}}=K|E|_{\mathrm{hyp}},$$

即式(21)的右边不等式是精确的.类似地,若取$f(z)=(1/K)z+\mathrm{i}y$,则可证明式(21)的左边不等式也是精确的.定理5证毕.

由定理4可得

定理6 如果f是一个上半平面H到自身上的双曲调和K-拟共形映照,那么,对于任意的可测集合$E\subset H$,有

$$\frac{4K}{(K+1)^2}|E|_{\mathrm{hyp}} \leqslant |f(E)|_{\mathrm{hyp}} = \iint_E \frac{\lambda_H \circ f}{\lambda_H} J_f \lambda_H \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{(K+1)^2}{4K}|E|_{\mathrm{hyp}}. \tag{22}$$

参考文献:

[1] AHLFORS L V. Complex analysis[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1979.

[2] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one to one mapings[J]. Bull Amer Math Soc, 1936, 42(10): 689-692.

[3] PARTYKA D, SAKAN K I. On an asymptotically sharp variant of Heinz' s inequality[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser AI, 2005, 30(1): 167-182.

[4] ASTALA K. Area distortion of quasiconformal mappings[J]. Acta Math, 1994, 173(1): 37-60.

[5] CHEN Xing-di, FANG Ainong. Harmonic Teichmüller mappings[J]. Proc Japan Acad Ser (A): Math Sci, 2006, 82(7): 101-105.

[6] KELINGOS J A. Distortion of hyperbolic area under quasiconformal mappings[J]. Duke Math J, 1974, 41(1): 127-139.

[7] PORTER R M, RESÉNDIS L F. Quasiconformally explodable sets[J]. Complex Variables, 1998, 36(4): 379-392.

[8] 陈行堤, 黄心中. 拟共形映照的爆破集问题[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2001, 22(2): 111-116.

[9] CHEN Xing-di, HUANG Xin-zhong. On the estimates of hyperbolic area distortion of quasiconformal mappings[J]. Chinese Quart J Math, 2007, 22(1): 137-142.

[10] 韩雪, 黄心中. 拟共形映照的双曲面积偏差[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2007, 28(4): 433-436.

[11] KALAJ D, PAVLOVIC M. Boundary correspondence under quasiconformal harmonic diffeomorphisms of a half-plane[J]. Ann Acad Sci Fen Math, 2005, 30(1): 159-165.

[12] AHLFORS L V. Conformal invariants: Topics in geometric function theory[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

[13] WAN T. Constant mean curvature surface, harmonic maps and universal Teichmüller space[J]. J Differential Geom, 1992, 35(3): 643-657.

[14] YAO Guo-wu. Convergence of harmonic maps on the Poincaré disk[J]. Proc Amer Math Soc, 2004, 132(8): 2483-2493.

Distortion Estimations of the Hyperbolic Jacobians of Harmonic Quasiconformal Mappings

CHEN Xing-di

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The distortion estimation with respect to the hyperbolic metrics of two classes of harmonic quasiconformal mappings is studied. First, the sharp upper and lower bounds of the hyperbolic Jacobians of Euclidean harmonic quasiconformal mappings from the upper half-plane onto itself and their corresponding extremal functions are given. Secondly, the distortion estimation of hyperbolic Jacobian of hyperbolic quasiconformal mappings are obtained. Finally, the distortion estimation of the above two classes of mappings is applied to study their corresponding distortion theorems about hyperbolic areas. The results show that the above two classes of harmonic quasiconformal mappings are non-explodable.

Keywords: harmonic mappings; quasiconformal mappings; hyperbolic Jacobians; hyperbolic areas

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)