

文章编号: 100025013(2010)020235206

一类二阶微分方程周期解的存在性

余志炜, 王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究一类具有偏差变元的二阶微分方程 $xd(t) + f(x(t)) + h(x(t))x(t) + g(t, x(t - S(t))) = p(t)$ 的周期解的存在性问题. 通过应用 Schwarz 不等式, Minkowski 不等式, 以及重合度理论, 在满足一定条件下, 得到方程至少存在一个 TO 周期解的新结果, 且其周期解存在性的充分条件并不要求 $h(x)$ 是有界函数.

关键词: 微分方程; 周期解; 重合度; 偏差变元; 存在性

中图分类号: O 175.14

文献标识码: A

具有偏差变元的二阶微分方程, 由于其在经济学、生态学, 以及控制理论等方面上的广泛应用, 逐渐地成为研究的热点^[108]. 文[4] 利用重合度理论, 研究一类具有偏差变元的 Rayleigh 方程, 即

$$xd(t) + f(x(t)) + g(t, x(t - S(t))) = p(t)$$

的周期解问题, 得到至少存在一个周期解的充分条件. 文[5] 利用 Mahwin 重合度拓展定理, 研究具有偏差变元的二阶微分方程, 即

$$xd(t) + f(x(t)) + h(x(t))x(t) + g(x(t - S(t))) = p(t) \quad (1)$$

的周期解问题, 得到了周期解存在性的一些充分条件, 但结果都要求函数有界. 本文利用重合度理论及分析技巧, 研究一类具有偏差变元的二阶微分方程

$$xd(t) + f(x(t)) + h(x(t))x(t) + g(t, x(t - S(t))) = p(t) \quad (2)$$

周期解的存在性问题. 其中: $g \in C(R @ R, R)$, 且对任意的 $x \in R$, $g(t + T, x) = g(t, x)$, $f, h, p, S \in C(R, R)$, $p(t + T) = p(t)$, $S(t + T) = S(t)$, $T > 0$ 是常数, $f(0) = 0$.

1 一些引理

引入重合度理论中的连续性引理. 设 X, Y 是赋范向量空间, $L \in \text{BDom } L < X \rightarrow Y$ 为线性映射, $N \in \text{B } X \rightarrow Y$ 是连续映射. 若 $\dim \text{Ker } L = \infty$, $\dim \text{Im } L < +\infty$, 且 $\text{Im } L$ 为 Y 中闭子集, 则称 L 是指标为零的 Fredholm 映射. 如果 L 是指标为零的 Fredholm 映射, 且存在连续投影 $P \in \text{B } X \rightarrow X$ 及 $Q \in \text{B } Y \rightarrow Y$, 使得 $\text{Im } P = \text{Ker } L$, $\text{Im } L = \text{Ker } Q = \text{Im}(I - Q)$, $X = \text{Ker } L \dot{\cup} \text{Ker } P$ 和 $Y = \text{Im } L \dot{\cup} \text{Im } Q$, 则 $L|_{\text{Dom } L \cap \text{HKer } P} : \text{Dom } L \cap \text{HKer } P \rightarrow \text{Im } L$ 可逆. 设其逆映射为 K_P , θ 为 X 中的有界开集, 若 $Q \in \text{B } Y$ 与 $K_P(I - Q) \in \text{B } Y \rightarrow X$ 都是紧的, 则称映射 N 在 θ 上是 LO 紧的.

由于 $\text{Im } Q$ 与 $\text{Ker } L$ 同构, 因而存在同构映射 $J \in \text{B } \text{Im } Q \rightarrow \text{Ker } L$.

引理 1^[8] 设 θ 是 X 中的有界开集, $L \in \text{BDom } L < X \rightarrow Y$ 是指标为零的 Fredholm 映射, $N \in \text{B } X \rightarrow Y$ 在 θ 上是 LO 紧的. 假设

(i) 对任意的 $K \in (0, 1)$, 方程 $Lx = KNx$ 的解满足 $x \in \theta$;

(ii) 对任意的 $x \in \theta \cap \text{HKer } L$, $QNx \neq 0$;

(iii) Brouwer 度 $\deg\{JQN, \theta \cap \text{HKer } L, 0\} \neq 0$,

则方程 $Lx = Nx$ 在 $\text{Dom } L \cap \theta$ 内至少存在一个解.

收稿日期: 2008211222

通信作者: 王全义 (19552), 男, 教授, 主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E2mail: qywang@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目 (Z0511026)

设 $X = \{x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid Bx(t+T) = x(t)\}$, $Y = \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid Bx(t+T) = x(t)\}$. 定义范数 $\|x\|_0 = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|$, $\|x\|_1 = \max\{\|x\|_0, \|x\|_0\}$, 则 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_0)$ 都是 Banach 空间. 记作 $\|x\|_2 = \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, 现在定义线性算子 L 和连续映射 N 为

$$L: \text{Dom } L \rightarrow Y, \quad Lx = x', \quad (3)$$

其中: $x \in \text{Dom } L = C_1^2 = \{x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid Bx(t+T) = x(t)\} \subset X$. 则

$$\left. \begin{aligned} N: X &\rightarrow Y, \\ Nx &= -f(x(t)) - h(x(t))x(t) - g(t, x(t-S(t))) + p(t), \quad x \in X \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由算子 L 的定义可知, $\text{Ker } L = \mathbb{R}$, $\text{Im } L = \{y \in Y \mid \int_0^T y(t) dt = 0\}$ 是 Y 中的闭子集, 而且 $\dim \text{Ker } L = 1 = \text{codim Im } L < +\infty$, 因此算子 L 是指标为零的 Fredholm 映射.

定义投影 $P: X \rightarrow \text{Ker } L$ 和 $Q: Y \rightarrow Y$ 为

$$Px = x(0) = x(T), \quad P: X \rightarrow X, \quad (5)$$

$$Qy = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt, \quad P: Y \rightarrow Y. \quad (6)$$

易见 P, Q 是连续投影, 且满足 $\text{Im } P = \text{Ker } L$, $\text{Im } L = \text{Ker } Q = \text{Im } (I - Q)$, $X = \text{Ker } L \dot{\cup} \text{Ker } P$, $Y = \text{Im } L \dot{\cup} \text{Im } Q$. 因此, $L|_{\text{Dom } L \cap \text{Ker } P} : \text{Dom } L \cap \text{Ker } P \rightarrow \text{Im } L$ 是可逆的, 且逆算子 $K_P: \text{Im } L \rightarrow \text{Dom } L \cap \text{Ker } P$ 可以表示为

$$\begin{aligned} K_P y(t) &= \int_0^t \int_0^s y(N) dN ds - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^s y(N) dN ds = \\ &= -\frac{1}{T} \int_0^T (T-s)y(s) ds + \int_0^t (t-s)y(s) ds, \quad y \in \text{Im } L \subset Y. \end{aligned} \quad (7)$$

引理 2^[6] $p \in (1, +\infty)$ 是一个常数, $s \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足 $s(t+T) = s(t)$, $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足 $u(t+T) = u(t)$, 则

$$\int_0^T |u(t) - u(t-s(t))|^p dt \leq 2 \left(\max_{t \in [0, T]} |s(t)| \right)^p \int_0^T |u(t)|^p dt.$$

引理 3^[7] 设 $s, R \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足 $s(t+T) = s(t)$ 和 $R(t+T) = R(t)$. 如果函数 $t \mapsto R(t)$ 存在唯一的逆 $L(t)$, 则 $P \in \mathbb{R}$, 有 $s(L(t+T)) = s(L(t))$.

引理 4 方程 (2) 有一个 TO 周期解, 当且仅当算子方程, 即

$$Lx = Nx, \quad (8)$$

在 X 中有一个 TO 周期解 $x \in \text{Dom } L$.

证明 由式 (3), (4) 可以得到. 证毕.

引理 5 $N: X \rightarrow Y$ 在 θ 上是 LO 紧的, 这里 θ 是 X 中的一个有界开集.

现在考虑算子方程 $Lx = K_N x$ 等价于

$$x'(t) = -K[f(x(t)) + h(x(t))x(t) + g(t, x(t-S(t))) - p(t)] \quad (9)$$

式 (9) 中: K 是 $(0, 1)$ 中某个确定的数.

引理 6 若存在常数 $D > 0$, 使得以下条件成立 1

(A1) 对所有的 $t \in \mathbb{R}$, $|x| \leq D$, 有 $x(g(t, x) - p(t)) < 0$, 则方程 (9) 的任一 TO 周期解 $x(t)$ 满足

$$\|x\|_0 \leq D + \sqrt{T} \|x\|_2. \quad (10)$$

证明 设 $x(t)$ 是方程 (9) 的 TO 周期解. 设

$$x(t_1) = \max_{t \in \mathbb{R}} x(t), \quad x(t_2) = \min_{t \in \mathbb{R}} x(t), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

则有

$$\begin{aligned} x'(t_1) &= 0, & x'(t_1) &\leq 0; \\ x'(t_2) &= 0, & x'(t_2) &\geq 0. \end{aligned}$$

由条件 (A1), $f(0) = 0$, 以及式 (9), 有

$$g(t_1, x(t_1-S(t_1))) - p(t_1) = -\frac{1}{K} x'(t_1) \leq 0,$$

$$g(t_2, x(t_2 - S(t_2))) - p(t_2) = -\frac{1}{K}x'(t_2) \leq 0,$$

从而有

$$x(t_1 - S(t_1)) < D, \quad x(t_2 - S(t_2)) > -D.$$

因为 $x(t - S(t))$ 是 \mathbb{R} 上连续的 TO 周期函数, 所以存在一个 $t_0 \in [0, T]$, 使得

$$|x(t_0 - S(t_0))| \leq D.$$

又由 $x(t)$ 的周期性可知, 存在 $t_0 \in [0, T]$, 及整数 n , 使得 $t_0 - S(t_0) = t_0 + nT$, 有

$$|x(t_0)| = |x(t_0 + nT)| = |x(t_0 - S(t_0))| \leq D.$$

应用 Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) ds| \leq \\ &D + \int_{t_0}^t |x'(s)| ds \leq D + \sqrt{T} \|x'\|_2, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

从而有

$$\|x\|_0 = \max_{t \in [0, T]} |x(t)| \leq D + \sqrt{T} \|x'\|_2.$$

(A2) $\int_0^T p(s) ds = 0$, 且 $p(s)$ 不是常数, $S \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 满足 $S(t) < t$, $p \in L^1(\mathbb{R})$.

由条件(A2), 马上可得到函数 $t - S(t)$ 存在唯一的反函数, 记为 $Q(t)$.

2 主要结果及其证明

定理 1 若条件(A1), (A2) 及下列条件成立:

(H1) $|f(x)| \leq K_1$, $p \in L^1(\mathbb{R})$;

(H2) 存在 $r > 0$, 使得对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有 $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \frac{|g(t, x)|}{|x|} \leq r$;

(H3) $\frac{\sqrt{2} \|S'\|_0 r T}{2P} K_0 < 1$, 其中 $K_0 = \left[\max_{t \in [0, T]} \frac{1}{1 - S(Q(t))} \right]^{1/2}$, 则方程 (2) 至少存在一个 TO 周期解.

证明 设 $\delta_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Dom } L < x, Lx = Kx, K \in (0, 1)\}$. 再设 $x = x(t) \in \delta_1$, 则 $x = x(t)$ 是方程 (9) 的一个解. 现在将方程 (9) 两边同时乘以 $x(t)$, 再从 0 到 T 求积分, 得

$$\begin{aligned} \|x'\|_2^2 &= - \int_0^T x'(t)x(t) dt = \int_0^T f(x(t))x(t) dt + \int_0^T h(x(t))x(t)x'(t) dt + \\ &\quad \int_0^T g(t, x(t - S(t)))x(t) dt - \int_0^T p(t)x(t) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

设 $t - S(t) = s$, 则 s 的逆函数为 $t = Q(s)$. 于是, 由变量替换及引理 3, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t, x(t - S(t)))x(t) dt &= \int_{S(0)}^{T-S(T)} \frac{g(Q(s), x(s))}{1 - S'(Q(s))} x(s) ds = \\ &= \int_0^T \frac{g(Q(s), x(s))}{1 - S'(Q(s))} x(s) ds. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t, x(t - S(t)))x(t) dt &= \int_0^T g(t, x(t - S(t)))x(t - S(t)) dt + \\ &\quad \int_0^T g(t, x(t - S(t)))[x(t) - x(t - S(t))] dt = \\ &= \int_{S(0)}^{T-S(T)} \frac{g(Q(s), x(s))}{1 - S'(Q(s))} x(s) ds + \int_0^T g(t, x(t - S(t)))[x(t) - x(t - S(t))] dt = \\ &= \int_0^T \frac{g(Q(s), x(s))}{1 - S'(Q(s))} x(s) ds + \int_0^T g(t, x(t - S(t)))[x(t) - x(t - S(t))] dt. \end{aligned}$$

又因为 $\int_0^T h(x(t))x(t)x'(t) dt = 0$, 从而由式 (11) 得

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 = & \int_0^T \frac{g(Q(s), x(s))}{1 - S(Q(s))} x(s) ds + \int_0^T g(t, x(t - S(t))) [x(t) - x(t - S(t))] dt + \\ & \int_0^T f(x(t)) x(t) dt - \int_0^T p(t) x(t) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

设 $D_1 = \{t \in [0, T] \mid |x(t)| > d\}$, $D_2 = \{t \in [0, T] \mid |x(t)| \leq d\}$, 则由条件 (A1) 得到

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{g(Q(t), x(t))}{1 - S(Q(t))} x(t) dt = & \int_0^T \frac{g(Q(t), x(t)) - p(Q(t)) + p(Q(t))}{1 - S(Q(t))} x(t) dt = \\ & K(Q_1 + Q_2) \int_0^T \frac{g(Q(t), x(t)) - p(Q(t))}{1 - S(Q(t))} x(t) dt + \int_0^T \frac{p(Q(t))}{1 - S(Q(t))} x(t) dt [\\ & \int_0^T \frac{g(Q(t), x(t)) - p(Q(t))}{1 - S(Q(t))} x(t) dt + K_2 \int_0^T |p(Q(t), x(t))| dt [\\ & KT + K_2^2 \int_0^T |x(t)|^2 dt]^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

其中: $K = \max_{t \in [0, T], |x| \leq d} \left| \frac{g(Q(t), x) - p(Q(t))}{1 - S(Q(t))} x \right|$, $K_2 = |P|_0 \sqrt{T}$. 由条件 (H3), 存在一个充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\frac{\sqrt{2} |S|_0 K_0 (r + \varepsilon) T}{2P} < 1. \quad (14)$$

对上述的 $\varepsilon > 0$, 由条件 (H2), 存在一个常数 $N_1 > 0$, 使得当 $|x| > N_1$ 时, 有

$$|g(t, x)| < (r + \varepsilon) |x|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

设 $E_1 = \{t \in [0, T] \mid |x(t - S(t))| > N_1\}$, $E_2 = \{t \in [0, T] \mid |x(t - S(t))| \leq N_1\}$. 由引理 2, 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^T |g(t, x(t - S(t))) [x(t) - x(t - S(t))]| dt [\\ & \int_0^T |g(t, x(t - S(t)))|^2 dt]^{1/2} \left(\int_0^T |x(t) - x(t - S(t))|^2 dt \right)^{1/2} [\\ & \sqrt{2} |S|_0 \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |g(t, x(t - S(t)))|^2 dt \right)^{1/2} [\\ & \sqrt{2} |S|_0 \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left((Q_1 + Q_2) \int_0^T |g(t, x(t - S(t)))|^2 dt \right)^{1/2} [\\ & \sqrt{2} |S|_0 \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(Q_1 \int_0^T |g(t, x(t - S(t)))|^2 dt \right)^{1/2} + \\ & \sqrt{2} |S|_0 \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(Q_2 \int_0^T |g(t, x(t - S(t)))|^2 dt \right)^{1/2} [\\ & \sqrt{2} |S|_0 (r + \varepsilon) \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |x(t - S(t))|^2 dt \right)^{1/2} + \sqrt{2T} |S|_0 g_{N_1} \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \\ & \sqrt{2} |S|_0 (r + \varepsilon) \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \frac{|x(t)|^2}{1 - S(Q(t))} dt \right)^{1/2} + \sqrt{2T} |S|_0 g_{N_1} \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} [\\ & \sqrt{2} |S|_0 (r + \varepsilon) K_0 \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \\ & \sqrt{2T} |S|_0 g_{N_1} \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中: $g_{N_1} = \max_{t \in [0, T], |x| \leq N_1} |g(t, x)|$.

设 $v(t) = x(t + t_0) - x(t_0)$, 则 $v(0) = v(T) = 0$. 从而由 Wirtinger 不等式, 有

$$\int_0^T |v(t)|^2 dt \leq \left(\frac{T}{2P} \right)^2 \int_0^T |vc(t)|^2 dt = \left(\frac{T}{2P} \right)^2 \int_0^T |x(t)|^2 dt.$$

由 Minkowski 不等式有

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} &= \left(\int_0^T |v(t) + x(t_0)|^2 dt \right)^{1/2} [\\ \left(\int_0^T |v(t)|^2 dt \right)^{1/2} &+ \left(\int_0^T |x(t_0)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left[\frac{T}{2P} \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + D \sqrt{T} \right]. \end{aligned}$$

将上式分别代入式(13), (15), 可得到

$$\int_0^T \frac{g(t, x(t))}{1 - S(t)} x(t) dt \leq \frac{K_0^2 K_2 T}{2P} \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + K_0^2 K_2 D \sqrt{T} + KT \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T |g(t, x(t - S(t))) [x(t) - x(t - S(t))]| dt \leq \\ & \sqrt{2} |S|_0 K_0 (r + B) \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\frac{T}{2P} \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + D \sqrt{T} \right) + \\ & \sqrt{2T} |S|_0 g_{N_1} \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2} |S|_0 K_0 (r + B) T}{2P} \int_0^T |x(t)|^2 dt + \\ & (\sqrt{2} |S|_0 K_0 (r + B) D \sqrt{T} + \sqrt{2T} |S|_0 g_{N_1}) \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

由条件(H1)和引理 6, 有

$$\int_0^T f(x(t)) x(t) dt \leq \int_0^T |f(x(t))| |x(t)| dt \leq K_1 T (D + \sqrt{T} \|x\|_2). \quad (18)$$

再将式(16), (17)和式(18) 代入式(12), 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^T |x(t)|^2 dt \leq \frac{\sqrt{2} |S|_0 K_0 (r + B) T}{2P} \int_0^T |x(t)|^2 dt + \\ & \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + (K_0^2 + 1) K_2 D \sqrt{T} + KT + K_1 DT, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{而 } Q = \sqrt{2} |S|_0 K_0 (r + B) D \sqrt{T} + \sqrt{2T} |S|_0 g_{N_1} + \frac{(K_0^2 + 1) K_2 T}{2P} + K_1 T \sqrt{T}.$$

此时由式(14), (19) 可知存在一个正常数 M_1 , 使得

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq M_1,$$

从而有

$$\int_0^T |x(t)| dt \leq \max_{t \in [0, T]} |x(t)| \int_0^T 1 dt = D + \sqrt{T} M_1 = M_2.$$

即对任意的 $x \in \mathcal{B}_1$, 有

$$\int_0^T |x(t)| dt \leq M_2,$$

故 \mathcal{B}_1 是有界的.

设 $\mathcal{B}_2 = \{x \in X \mid x \in \text{Ker } L, Nx \in \text{Im } L\}$. 则对任意的 $x \in \mathcal{B}_2$, 存在 $M_3 \in \mathbb{R}$, 使得 $x = M_3$ 且

$$\int_0^T g(t, M_3) dt = 0.$$

由积分中值定理可得, 存在 $\eta \in [0, T]$, 使得 $g(\eta, M_3) = 0$. 再由条件 (H1), 可得

$$|M_3| < D,$$

故 \mathcal{B}_2 是有界的.

设 $\mathcal{B} = \{x \in X \mid \|x\| \leq D + M + 1, Bx = M_0\}$, 则有 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, 且它是一个有界开集. 由前面的讨论, 知道引理 1 的条件 (i) 和 (ii) 均被满足. 现在定义同伦映射为

$$H(x, L) = Lx - (1 - L)QNx, \quad x \in \mathcal{B} \cap \text{Ker } L, \quad L \in [0, 1].$$

对任意的 $x \in \mathcal{B} \cap \text{Ker } L$, $L \in [0, 1]$, 有 $x = M_0 \in \mathbb{R}$ 且 $|M_0| > D$, 从而对所有的 $x \in \mathcal{B} \cap \text{Ker } L$, 有

$$\langle x, H(x, L) \rangle = \langle x, Lx \rangle - \frac{1-L}{T} \int_0^T x(g(t, x) - p(t)) dt > 0,$$

由此得到

$$\langle x, H(x, L) \rangle > 0, \quad x \in \mathcal{B} \cap \text{Ker } L, \quad L \in [0, 1].$$

因为 $\text{Im } Q = \text{Ker } L = \mathbb{R}$, 所以可取同构映射 $J = I_B \text{Im } Q \rightarrow \text{Ker } L$. 由拓扑度的同伦不变性可知

$$\deg(JQN, \mathcal{B} \cap \text{Ker } L, 0) = \deg(QN, \mathcal{B} \cap \text{Ker } L, 0) =$$

$$\deg(H(x, 0), \mathcal{B} \cap \text{Ker } L, 0) = \deg(H(x, 1), \mathcal{B} \cap \text{Ker } L, 0) = 1 \neq 0.$$

这样, 引理 1 的条件 (iii) 也被满足了, 故由引理 1 可知方程 (8) 在 \mathcal{B} 上至少存在一个解 $x = x(t)$. 又因为 $x \in X$ 满足 $x(t+T) = x(t)$, 所以 $x = x(t)$ 即为方程(8) 在 X 中的一个 T -周期解, 从而由引理 4

可得, 方程 (2) 在 \mathbb{R} 上至少存在一个周期解. 证毕.

3 例子

例 1 考虑如下方程

$$x''(t) + \sin x(t) + x(t)x'(t) + g(t, x(t - S(t))) = \sin t \quad (20)$$

其中: $S(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 且满足 $S'(t) < 1$, $S(t + 2P) = S(t)$, $P \in \mathbb{R}$, 而有

$$g(t, x) = \begin{cases} -(1 + \exp(\cos t))x^{1/3}, & x \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ (1 + \exp(\cos t))x^{1/3}, & x < 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

对应方程 (2), 有 $T = 2P$, $f(x) = \sin x$, $h(x) = x$. 取 $K_1 = 1$, $D > 0$, $r = 0$, 且令 $\varphi(t)$ 是 $t - S(t)$ 的反函数, 则由定理 1 得到, 方程 (20) 至少存在一个 $2P$ 周期解.

注 1 因为 $h(x) = x$ 在 \mathbb{R} 上不是有界的, 且函数 $g(t, x)$ 中显含 t , 因此, 文 [5] 中的定理 2 不能应用到方程 (20) 中.

参考文献:

- [1] 张莉, 王全义. 具有偏差变元的二阶中值泛函微分方程周期解[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2007, 28(4): 437-440.
- [2] POURNAKI M R, RAZANI A. On the existence of periodic solutions for a class of generalized forced Li nard equations[J]. Appl Math Lett, 2007, 20(3): 248-254.
- [3] WANG WeiBing, LUO ZhOguo. Positive periodic solutions of second order differential equations[J]. Appl Math Lett, 2007, 20(3): 266-271.
- [4] LIU BingOwen, HUANG LOhong. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument[J]. J Math Anal Appl, 2006, 32(2): 491-500.
- [5] 杜波, 鲁世平. 一类具偏差变元的二阶微分方程周期解[J]. 数学研究, 2007, 40(1): 1-12.
- [6] LU ShOping, GE WeOgao. Sufficient conditions for the existence of periodic solutions to some second order differential equations with a deviating argument[J]. J Math Anal Appl, 2005, 308(2): 393-419.
- [7] LU ShOping, GE WeOgao. Existence of positive solutions for neutral population model with multiple delays[J]. Appl Math Comput, 2004, 153(3): 885-902.
- [8] GAINES R E, MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equation[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977: 40-60.

Existence of Periodic Solutions for a Class of Second Order Differential Equations

SHE ZhOwei, WANG QuanYi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study the problem on the existence of periodic solutions for a class of second order differential equations with a deviating argument $x''(t) + f(x(t)) + h(x(t))x'(t) + g(t, x(t - S(t))) = p(t)$. By means of Schwarz's inequality and Minkowski's inequality and the coincidence degree theory, a new result on the existence of periodic solutions for the equations is obtained under some conditions. In the sufficient conditions of the existence of periodic solutions for the equations, the bounded function $h(x)$ may not be required.

Keywords: differential equation; periodic solution; coincidence degree; deviating argument; existence

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)