

文章编号: 1000-5013(2010)02-0230-05

勾股向量的矩阵表示

宋海洲

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究 Hall 矩阵与规范本原勾股向量的关系, 得到任意规范本原勾股向量可唯一表示成 $(3, 4, 5)$ 右乘若干次 Hall 矩阵的形式, 并由此得到任意勾股向量的矩阵表示. 设 (a, b, c) 是任意一个规范本原勾股向量, 并且 $c \geq 5$, 记 $W = \{ A | A = X_1^{t_1} X_2^{t_2} \dots X_n^{t_n}, X_i \in \{ F_1, F_2, F_3 \}, t_i \in \mathbf{Z}, t_i \geq 0 \}$, 则存在唯一的 $A \in W$, 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$.

关键词: 勾股数; 本原勾股数; 群; 有限生成

中图分类号: O 151.21

文献标识码: A

若整数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 称 $\{a, b, c\}$ 为一组 (广义) 勾股数组^[1-6]; 如果勾股数组写成向量形式 (a, b, c) , 则称该向量为一个勾股向量. 1970 年, Hall 构造了 3 个有趣的矩阵 (这 3 个矩阵为 Hall 矩阵), 得到了如下的定理 1^[1-6].

定理 1 设 $F_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, (a, b, c) 是任意一勾

股向量, 即 $a^2 + b^2 = c^2$, 则 $(a, b, c)F_1, (a, b, c)F_2, (a, b, c)F_3$ 仍然为勾股向量.

定义 1 若 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 且 a, b, c 互素, 称 $\{a, b, c\}$ 为一组本原勾股数组, 对应的向量为一个本原勾股向量.

显然, 有如下的引理 1.

引理 1 如果 $\alpha = (a, b, c)$ 是任意的一个本原勾股向量, 那么, a, b 之中必有一个是奇数, 一个是偶数, 而 c 必是奇数.

定义 2 如果正整数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 且 a, b, c 互素, 而 b 为偶数, 称 $\{a, b, c\}$ 为一组规范本原勾股数组, 对应的向量为一个规范本原勾股向量.

本文研究 Hall 矩阵与规范本原勾股向量的关系.

1 规范本原勾股向量的表示

记 $H = \{ (a, b, c) | (a, b, c) \text{ 是规范本原向量} \}$, $Q = \{ (k, m)' | k > m > 0, k, m \text{ 都是奇数, } k \text{ 与 } m \text{ 互素} \}$, $W = \{ A | A = X_1^{t_1} X_2^{t_2} \dots X_n^{t_n}, X_i \in \{ F_1, F_2, F_3 \}, t_i \in \mathbf{Z}, t_i \geq 0 \}$.

定理 2 $H = \{ (km, \frac{k^2 - m^2}{2}, \frac{k^2 + m^2}{2}) | k > m > 0, k, m \text{ 都是奇数, } k \text{ 与 } m \text{ 互素} \}$.

证明 设 $k > m > 0, k, m$ 都是奇数, k 与 m 互素. 容易验证 $(km, \frac{k^2 - m^2}{2}, \frac{k^2 + m^2}{2})$ 是一个勾股向量,

$km > 0, \frac{k^2 - m^2}{2} > 0, \frac{k^2 + m^2}{2} > 0$, 并且 $\frac{k^2 - m^2}{2}$ 是偶数.

收稿日期: 2008-06-21

作者简介: 宋海洲 (1971-), 男, 副教授, 主要从事数学模型及运筹学的研究. E-mail: hzsong@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目 (Z0511028)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

假设 $km, \frac{k^2-m^2}{2}$ 与 $\frac{k^2+m^2}{2}$ 不互素, 则存在奇素数 p , 使得 $p \mid km, p \mid \frac{k^2-m^2}{2}$. 由于 k 和 m 互素, 所以 $p \nmid k$ 或 $p \nmid m$. (1) 若 $p \mid k$, 由 $p \mid \frac{k^2-m^2}{2}$, 可以推出 $p \mid m$, 因此, 奇素数 p 是 k 和 m 的公因子. 这与 k 和 m 互素矛盾; (2) 若 $p \mid m$, 由 $p \mid \frac{k^2-m^2}{2}$, 可以推出 $p \mid k$, 因此, 奇素数 p 是 k 和 m 的公因子. 这与 k 和 m 互素矛盾.

所以, $km, \frac{k^2-m^2}{2}$ 与 $\frac{k^2+m^2}{2}$ 必互素, 也就是说 $(km, \frac{k^2-m^2}{2}, \frac{k^2+m^2}{2})$ 是一个规范本原勾股向量, 从而 $\{(km, \frac{k^2-m^2}{2}, \frac{k^2+m^2}{2}) \mid k > m > 0, k, m \text{ 都是奇数}, k \text{ 与 } m \text{ 互素}\} \subset H$.

另外一方面, 如果 $(a, b, c) \in H$, 则根据定义有 a, b, c 是互素的正整数, b 是偶数, 并且 $a^2 + b^2 = c^2$. 由引理 1, 又可得 a, c 是奇数.

由 $a^2 + b^2 = c^2$, 可得 $a^2 = (c+b)(c-b)$. 令 $c-b = m^2t$, 其中 m 和 t 都是正奇数, 并且 t 无平方因子, 则 $c+b = k^2t$, k 是某个大于 m 的正奇数. 因此, $a = kmt, b = \frac{k^2-m^2}{2}t, c = \frac{k^2+m^2}{2}t$.

由 a, b, c 是互素的正整数, 可以推出 $t = 1$, 所以, $a = km, b = \frac{k^2-m^2}{2}, c = \frac{k^2+m^2}{2}$. 又因为 a, b, c 是互素, 必有 k 和 m 互素, 从而 $(a, b, c) \in \{(km, \frac{k^2-m^2}{2}, \frac{k^2+m^2}{2}) \mid k > m > 0, k, m \text{ 都是奇数}, k \text{ 与 } m \text{ 互素}\}$.

即有 $H \subset \{(km, \frac{k^2-m^2}{2}, \frac{k^2+m^2}{2}) \mid k > m > 0, k, m \text{ 都是奇数}, k \text{ 与 } m \text{ 互素}\}$.

综上所述, 有 $H = \{(km, \frac{k^2-m^2}{2}, \frac{k^2+m^2}{2}) \mid k > m > 0, k, m \text{ 都是奇数}, k \text{ 与 } m \text{ 互素}\}$.

作一个 $H \rightarrow Q$ 的映射 $f[(km, \frac{k^2-m^2}{2}, \frac{k^2+m^2}{2})] = (k, m)'$, 容易验证 f 是 H 到 Q 的一一映射.

容易验证下面定理成立.

定理 3 $f[(km, \frac{k^2-m^2}{2}, \frac{k^2+m^2}{2})F_1] = (2k+m, k)'; f[(km, \frac{k^2-m^2}{2}, \frac{k^2+m^2}{2})F_2] = (2k-m, k)'; f[(km, \frac{k^2-m^2}{2}, \frac{k^2+m^2}{2})F_3] = (k+2m, m)'; f((3, 4, 5)) = (3, 1)'$.

再作 3 个 $Q \rightarrow Q$ 的映射: $g_1((k, m)') \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}, g_2((k, m)') \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}, g_3((k, m)') \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$.

易验证, 在 $3m' > k' > 2m' > 0, k'$ 与 m' 互素时, 有 $g_1^{-1} \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ k' - 2m' \end{pmatrix}$; 在 $2m' > k' > m' > 0, k'$ 与 m' 互素时, 有 $g_2^{-1} \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ -k' + 2m' \end{pmatrix}$; 在 $k' > 3m' > 0, k'$ 与 m' 互素时, 有 $g_3^{-1} \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k' - 2m' \\ m' \end{pmatrix}$.

定义 3 设 $\begin{pmatrix} k_1 \\ m_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_2 \\ m_2 \end{pmatrix} \in Q$, 如果 $k_1 < k_2$, 或者虽然有 $k_1 = k_2$, 但 $m_1 < m_2$, 称 $\begin{pmatrix} k_1 \\ m_1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} k_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$.

2 Hall 矩阵与规范本原勾股向量的关系

定理 4 设 (a, b, c) 是任意一个规范本原勾股向量, 并且 $c \geq 5$, 则存在 $A \in W$, 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$. 另外, 任意 $A \in W$, 则 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$ 为规范本原勾股向量, 并且 $c \geq 5$.

证明 任意 $A \in W$, 由定理 1 可得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$, 其为本原勾股向量. 容易验证 (a, b, c) 是规范本原勾股向量, 并且 $c \geq 5$.

设 (a, b, c) 是任意一个规范本原勾股向量, 且 $c \geq 5$, 并假设 $f((a, b, c)) = \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix}$, 若 $k' > 3m' > 0$, 则

$$g_3^{-1} \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k' - 2m' \\ m' \end{pmatrix}, \text{ 有 } \begin{pmatrix} k' - 2m' \\ m' \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix} \text{ 成立.}$$

此时, 令 $(a_1, b_1, c_1) = (a, b, c)F_3^{-1}$, 有 $f((a_1, b_1, c_1)) < f((a, b, c))$ 成立. 若 $k' = 3m' > 0$, 则必有 $\begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; 若 $3m' > k' > 2m' > 0$, 则 $g_1^{-1} \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ k' - 2m' \end{pmatrix}$, 有 $\begin{pmatrix} m' \\ k' - 2m' \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix}$ 成立.

此时, 令 $(a_1, b_1, c_1) = (a, b, c)F_1^{-1}$, 有 $f((a_1, b_1, c_1)) < f((a, b, c))$ 成立; 若 $2m' > k' > m' > 0$, 则必有 $g_2^{-1} \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ -k' + 2m' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m' \\ -k' + 2m' \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix}$ 成立.

此时, 令 $(a_1, b_1, c_1) = (a, b, c)F_2^{-1}$, 有 $f((a_1, b_1, c_1)) < f((a, b, c))$ 成立. 即无论 k', m' 取什么值, 均存在 $X_1 (X_1 \in \{F_1, F_2, F_3\})$.

此时, 令 $(a_1, b_1, c_1) = (a, b, c)X_1^{-1}$, 有 $f((a_1, b_1, c_1)) < f((a, b, c))$ 成立; 否则, 必有 $f((a, b, c)) = \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

同理, 存在 $X_2 (X_2 \in \{F_1, F_2, F_3\})$. 令 $(a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_1)X_2^{-1}$, 有 $f((a_2, b_2, c_2)) < f((a_1, b_1, c_1))$ 成立; 否则, 必有 $f((a_1, b_1, c_1)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

由数学归纳法可知, 存在 $X_1, X_2, \dots, X_n (X_i \in \{F_1, F_2, F_3\})$, 使得 $f((a, b, c)X_1^{-1}X_2^{-1}\dots X_n^{-1}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, 即存在 $X_1, X_2, \dots, X_n (X_i \in \{F_1, F_2, F_3\})$, 使得 $(a, b, c)X_1^{-1}X_2^{-1}\dots X_n^{-1} = (3, 4, 5)$.

所以, 存在 $X_1, X_2, \dots, X_n (X_i \in \{F_1, F_2, F_3\})$, 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)X_n X_{n-1} \dots X_1$, 故存在 $A \in W$ 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$.

引理 2 设 $(a, b, c), (a_1, b_1, c_1)$ 是任意两个(可以相等)规范本原勾股向量, 则任意 $F_i, F_j (i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3, i \neq j)$, 有 $(a, b, c)F_i \neq (a_1, b_1, c_1)F_j$.

证明 设 $f((a, b, c)) = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}, f((a_1, b_1, c_1)) = \begin{pmatrix} k' \\ m' \end{pmatrix}$, 显然有 $k > m > 0$ 及 $k_1 > m_1 > 0$.

由定理 3 可得

$$\begin{aligned} f((a, b, c)F_1) &= \begin{pmatrix} 2k+m \\ k \end{pmatrix}, & f((a, b, c)F_2) &= \begin{pmatrix} 2k-m \\ k \end{pmatrix}, \\ f((a, b, c)F_3) &= \begin{pmatrix} k+m \\ m \end{pmatrix}, & f((a_1, b_1, c_1)F_1) &= \begin{pmatrix} 2k_1+m_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \\ f((a_1, b_1, c_1)F_2) &= \begin{pmatrix} 2k_1-m_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, & f((a_1, b_1, c_1)F_3) &= \begin{pmatrix} k_1+2m_1 \\ m_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

若 $(a, b, c)F_1 = (a_1, b_1, c_1)F_2$, 则 $\begin{pmatrix} 2k+m \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1-m_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$, 从而 $k = k_1, m = -m_1$ 矛盾. 若 $(a, b, c)F_1 = (a_1, b_1, c_1)F_3$, 则 $\begin{pmatrix} 2k+m \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1+2m_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$, 从而 $k = m_1, m = k_1$, 由 $k > m > 0$ 得 $k_1 < m_1$ 矛盾. 若 $(a, b, c)F_2 = (a_1, b_1, c_1)F_3$, 则 $\begin{pmatrix} 2k-m \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1+2m_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$, 从而 $k = m_1, -m = k_1$ 矛盾.

同理可证明, 若 $(a, b, c)F_2 = (a_1, b_1, c_1)F_1, (a, b, c)F_3 = (a_1, b_1, c_1)F_1$ 与 $(a, b, c)F_3 = (a_1, b_1, c_1)F_2$ 都会导出矛盾.

综上所述, 任意 $F_i, F_j (i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3, i \neq j)$, 有 $(a, b, c)F_i \neq (a_1, b_1, c_1)F_j$.

由引理 2, 容易得到引理 3.

引理 3 设 $(a, b, c), (a_1, b_1, c_1)$ 是任意两个规范本原勾股向量. 若 $F_i, F_j (i = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 3)$

使得 $(a, b, c)F_i = (a_1, b_1, c_1)F_j$ 成立, 则必有 $(a, b, c) = (a_1, b_1, c_1)$ 及 $F_i = F_j$ 成立.

定理 5 设 (a, b, c) 是任意一个规范本原勾股向量, 并且 $c \geq 5$, 则存在惟一的 $A \in W$, 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$.

证明 设 (a, b, c) 是任意一个规范本原勾股向量, 且 $c \geq 5$. 由定理 4 知, 存在 $A \in W$, 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$.

下面证明惟一性.

假设 $B \in W$, 也使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)B$. 设 $A = X_1 X_2 \dots X_m (X_i \in \{F_1 F_2 F_3\})$, $B = Y_1 Y_2 \dots Y_n (Y_j \in \{F_1 F_2 F_3\})$, 则 $(3, 4, 5)X_1 X_2 \dots X_m = (3, 4, 5)Y_1 Y_2 \dots Y_n$.

若 $m > n$, 由引理 3 有 $X_m = Y_n$, 且 $(3, 4, 5)X_1 X_2 \dots X_{m-1} = (3, 4, 5)Y_1 Y_2 \dots Y_{n-1}$.

不断利用引理 3, 可得 $X_m = Y_n, X_{m-1} = Y_{n-1}, \dots, X_{m-n+1} = Y_1$, 及 $(3, 4, 5)X_1 X_2 \dots X_{m-n} = (3, 4, 5)$ 成立. 又容易验证 $(3, 4, 5)X_1 X_2 \dots X_{m-n} = (3, 4, 5)$ 是不可能成立的, 所以 $m > n$, 不可能成立.

同理, 可以证明 $n > m$ 不可能成立, 故有 $m = n$. 当 $m = n$ 时, 不断利用引理 3, 可得 $X_m = Y_n, X_{m-1} = Y_{n-1}, \dots, X_1 = Y_1$, 所以 $X_1 X_2 \dots X_m = Y_1 Y_2 \dots Y_n$, 从而 $A = B$.

综上所述, 若 (a, b, c) 是任意一个规范本原勾股向量, 且 $c \geq 5$, 则存在惟一的 $A \in W$, 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$.

3 勾股向量的矩阵表示

引理 4 $(1, 0, 1) = (3, 4, 5)F_1^{-1}$. 记 $G_1 = \{D_1 = \text{diag}[1, 1, 1], D_2 = \text{diag}[-1, 1, 1], D_3 = \text{diag}[1, -1, 1], D_4 = \text{diag}[1, 1, -1], D_5 = \text{diag}[-1, -1, 1], D_6 = \text{diag}[-1, 1, -1], D_7 = \text{diag}[1, -1, -1], D_8 = \text{diag}[-1, -1, -1]\}$.

定理 6 设 (a, b, c) 是任意一个本原勾股向量, 其中 b 是偶数, 并且 $|c| \geq 5$, 则存在惟一的一组矩阵 $A, C (A \in W, C \in G_1)$, 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)AC$.

证明 先证明存在性. 设 (a, b, c) 是任意一个本原勾股向量, 其中 b 是偶数, 且 $|c| \geq 5$. 显然存在 $C \in G_1$, 使得 $(a, b, c)C$ 为规范本原勾股向量. 由定理 5 可得, 存在 $A \in W$, 使得 $(a, b, c)C = (3, 4, 5)A$. 注意到 $C^{-1} = C$, 所以有 $(a, b, c) = (3, 4, 5)AC$ 成立.

再证明惟一性. 假设 $A_1 \in W, C_1 \in G_1$, 也使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A_1 C_1$ 成立, 则有 $(a, b, c)AC = (3, 4, 5)A_1 C_1$, 因此, 有 $(3, 4, 5)A = (3, 4, 5)A_1 C_1 C$. 设 $(3, 4, 5)A = (x, y, z), (3, 4, 5)A_1 = (x_1 y_1 z_1)$, 由定理 4 可知, $x > 0, y > 0, z > 0, x_1 > 0, y_1 > 0, z_1 > 0$, 而 $C_1 C$ 为主对角线元素是 1 或 -1 的对角矩阵, 所以 $(3, 4, 5)A = (3, 4, 5)A_1$. 再由定理 5, 可得 $A = A_1$, 从而 $C_1 C = E_3$ (3 阶单位阵), 故 $C_1 = C$. 惟一性得到证明.

由引理 4 和定理 6 可以得到定理 7.

定理 7 设 (a, b, c) 是任意一个本原勾股向量, 其中 b 是偶数, 则存在惟一的一组矩阵 $A, C (A \in W$ 或者 $A = F_1^{-1}, C \in G_1)$, 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)AC$.

推论 1 设 (a, b, c) 是任意一个本原勾股向量, 则存在惟一的一组矩阵 A, C, B , 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)ACB$. 其中, $A \in W$, 或者 $A = F_1^{-1}, C \in G_1, B \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

记 D_1, \dots, D_8 及 F_1, F_2, F_3 为上文所示的矩阵, $F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 记 $L(F_1, F_2, F_3, F_4)$, 表示由矩阵 F_1, F_2, F_3, F_4 生成的关于矩阵法的有限生成群; 记 $L(F_1, F_2, F_4, D)$, 表示由矩阵 F_1, F_2, F_4, D 生成的关于矩阵乘法的有限生成群.

引理 5 $D_1 = F_1 F_1^{-1}, D_2 = F_1 F_2^{-1}, D_3 = F_1 F_3^{-1}, D_4 = F_1 F_4^{-1}, D_5 = F_2 F_3^{-1}, D_6 = F_2 F_4^{-1}, D_7 = F_3 F_4^{-1}, D_8 = F_2 F_3^{-1} F_1 F_4^{-1}$.

由定理 7 及引理 5, 容易得到推论 2.

推论 2 设 (a, b, c) 是任意一个本原勾股向量, 其中 b 是偶数, 则存在 $A \in L(F_1, F_2, F_3, F_4)$ 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$.

引理 6 设 A 是 $L(F_1, F_2, F_3, F_4)$ 中任意一个元素, 则 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$ 是一个本原勾股向量, 并且 b 是偶数.

由推论 2 及引理 6 容易得到定理 8.

定理 8 (a, b, c) 是一个满足 b 的偶数的, 本原勾股向量, 其充要条件是存在 $A \in L(F_1, F_2, F_3, F_4)$, 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$.

容易验证引理 7.

引理 7 $L(F_1, F_2, F_3, F_4) \subset L(F_1, F_2, F_4, D)$

由推论 1 及引理 7, 容易得到定理 9.

定理 9 (a, b, c) 是一个本原勾股向量的充要条件, 存在 $A \in L(F_1, F_2, F_4, D)$, 使得 $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$.

由定理 9, 容易得到定理 10.

定理 10 (1) 设 $(a, b, c), (a', b', c')$ 是任意两个本原勾股向量, 则存在 $A \in L(F_1, F_2, F_4, D)$, 使得 $(a', b', c') = (a, b, c)A$.

(2) 设 (a, b, c) 是任意一个本原勾股向量, (a', b', c') 是任意一个勾股向量, 则存在 $A \in L(F_1, F_2, F_4, D)$ 及 $p \in N$, 使得 $(a', b', c') = p(a, b, c)A$.

(3) 设 (a, b, c) 是任意一个不为 0 的勾股向量, (a', b', c') 是任意一个勾股向量, 则存在 $A \in L(F_1, F_2, F_4, D)$, $p \in N$ 及 $q \in N$, 使得 $(a', b', c') = \frac{p}{q}(a, b, c)A$.

参考文献:

- [1] 宋海洲. 勾股矩阵的性质及表示[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2009, 30(1): 104-107.
- [2] PHYLLIS L, 顾海润. 产生勾股数组的矩阵方法[J]. 数学通讯, 1988(5): 43.
- [3] 李旭东, 智海章. 勾股数组生成矩阵的发现探究[J]. 广西右江民族师专学报, 2004, 17(6): 4-6.
- [4] 李淑敏, 王炳安. 关于勾股数的矩阵生成法[J]. 大连大学学报, 1996, 6(4): 347-350.
- [5] 牛普选. 勾股数组与矩阵[J]. 南都学坛, 1998, 18(6): 27-30.
- [6] 冯岳翔. 奇妙的勾股数组[J]. 商洛师范专科学校学报, 1996, 7(1): 48-49.

Matrix Representation of Pythagorean Vector

SONG Hai-zhou

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: This paper discusses the relation between Hall matrices and the normal primitive pythagorean vectors. By applying number-theoretic method, we obtain that arbitrary normal primitive pythagorean vector can be uniquely represented with $(3, 4, 5)$ right multiplied by some Hall matrices. We also give the matrix representation of arbitrary pythagorean vector. Let (a, b, c) be an arbitrary normal primitive pythagorean vector, $c \geq 5$, $W = \{A | A = X_1^1 X_2^2 \dots X_n^n, X_i \in \{F_1, F_2, F_3\}, t_i \in \mathbb{Z}, t_i \geq 0\}$, then there exists a unique $A \in W$, such that $(a, b, c) = (3, 4, 5)A$.

Keywords: pythagorean number; primitive pythagorean number; group; generator

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)