文章编号: 1000-5013(2010)02-0227-03

高阶 Boussinesq-Burgers 方程的 Painlevé 测试及其精确解

李金伟, 张金顺

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 应用 Painlevé 测试方法, 研究高阶 Boussinesq-Burgers 方程, 证明该方程是 Painlevé 完全可积的. 利用 Painlevé 分析, 得到该方程的自 Backlund-Darboux 变换和一些精确解.

关键词: Painlevé 测试; 高阶 Boussinesq-Burgers 方程; 调谐因子; Backlund-Darboux 变换; 孤立子解

中图分类号: O 175.3 文献标识码: A

非线性微分方程的可积性判定, 是非线性理论研究中十分的重要内容, 而 Painlevé 测试方法是判定非线性偏微分方程可积性的有效方法. 利用 Painlevé 测试方法, 在判定方程可积性的同时, 还能得到非线性方程的自 Backlund-Darboux 变换和 Lax 对等[1-3]. 对于高阶 Boussinesq-Burgers 方程

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \left(\frac{1}{4}u_{xx} + u^3 - \frac{3}{2}uv\right)_x, \\ v_t &= \left(\frac{1}{4}v_{xx} - \frac{3}{2}uu_{xx} - \frac{3}{4}u_x^2 - \frac{3}{4}v^2 + 3u^2 v\right)_x. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

文[4]用 Bargamann 约束的办法, 得到相应的有限维 Hamilton 系统和代数几何解. 本文用 Painlevé 分析方法证明了该方程是完全可积性的, 并找出了相关的自 Backlund-Darboux 变换、孤立子解、周期解.

1 Boussinesq-Burgers 方程的 Painlevé 测试

首先把 Boussinesq-Burgers 方程(1)转化为

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{4}u_{xxx} + 3u^2 u_x - \frac{3}{2}u_x v - \frac{3}{2}uv_x, \\ v_t &= \frac{1}{4}v_{xxx} - 3u_x u_{xx} - \frac{3}{2}uu_{xxx} - \frac{3}{2}vv_x + 3u^2 v_x + 6uvu_x. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

按照 Painlevé 测试方法, 假设方程有罗朗级数形式的解为

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varphi^{i-\alpha}, \\ v(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \varphi^{i-\beta}. \end{cases}$$

其中: u_i, v_i, φ 为 x, t 的解析函数($i=0,1,2,\cdots$). 将其代入方程(2), 由主导项($i=0$)可得到 $\alpha=1$, $\beta=2$, 以及

$$\begin{cases} -2v_0\varphi_x^2 + 5u_0^2\varphi_x^2 + v_0^2 - 4u_0^2 v_0 = 0, \\ -\varphi_x^2 - 2u_0^2 + 3v_0 = 0. \end{cases}$$

于是, 有 $v_0 = 1/2\varphi_x^2$, $u_0 = \pm 1/2\varphi_x$ 或 $v_0 = \varphi_x^2$, $u_0 = \pm\varphi_x$ 共4个分支. 取其中 $v_0 = 1/2\varphi_x^2$, $u_0 = \pm 1/2\varphi_x$ 分

收稿日期: 2009-04-07

通信作者: 张金顺(1956-), 男, 教授, 主要从事孤立子理论与可积系统的研究. E-mail: jszhang@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871165); 华侨大学高层次人才科研启动项目(07BS106)

支, 计算调谐因子, 有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}v_i\varphi_x^3(i+1)(i-3)(i-4)(i-5)=F_1,\\[2ex]\dfrac{1}{4}u_i\varphi_x^4(i+1)(i-1)(i-3)(i-4)(i-5)=F_2.\end{cases}$$

其中: F_1, F_2 是 u_0, v_0, u_1, v_1, $\cdots$, u_{i-1}, v_{i-1}, φ_x 的解析函数. 所以, u, v 的调谐因子分别为 -1, 1, 3, 4, 5 和 -1, 3, 4, 5.

通过选择适当的 u_i, v_i, 将 Boussinesq-Burgers 方程的奇异流形展式进行有限截断, 证明了 Boussinesq-Burgers 方程具有 Painlevé 可积性质. 因此, 可以得到方程的 Backlund-Darboux 变换.

定理 1 Boussinesq-Burgers 方程(2) 的 Backlund-Darboux 变换为

$$\begin{cases}u=\dfrac{u_0}{\varphi}+u_1,\\[2ex]v=\dfrac{v_0}{\varphi^2}+\dfrac{v_1}{\varphi}+v_2.\end{cases}\tag{3}$$

式(3)中, φ满足 Schwarz 方程

$$\frac{\varphi_t}{\varphi_x}+\frac{1}{2}\{\varphi;x\}=0.\tag{4}$$

证明 设 u, v 是方程(2)的解. 将式(3)带入方程(2), 比较 φ的同次幂的系数, 可得

$$\varphi^{-4}: v_1=-\frac{1}{2}\varphi_{xx},$$

$$\varphi^{-3}: \varphi_t=\frac{1}{4}\varphi_{xxx}+\frac{3}{2}u_x\varphi_{xx}+\frac{3}{2}u_{1x}\varphi_{xx}+3u_1^2\varphi_x,$$

$$\varphi^{-2}: \varphi_t=\frac{1}{4}\varphi_{xxx}+\frac{3}{2}u_1\varphi_{xx}-\frac{3}{2}v_2\varphi_x+3u_1^2\varphi_x$$

$$\varphi_x\varphi_{xt}+\frac{1}{2}\varphi_{xx}\varphi_t=\frac{1}{4}\varphi_x\varphi_{xxxx}+\frac{1}{8}\varphi_{xx}\varphi_{xxx}+\frac{3}{2}u_1\varphi_x\varphi_{xxx}+$$

$$\frac{3}{4}u_1\varphi_{xx}^2+3u_{1x}\varphi_x\varphi_{xx}+\frac{3}{2}u_{1xx}\varphi_x^2-$$

$$\frac{3}{4}v_1\varphi_x\varphi_{xx}-3u_1v_2\varphi_x^2+3u_1u_{1x}\varphi_x^2+\frac{9}{2}u_1^2\varphi_x\varphi_{xx}$$

$$\varphi^{-1}: \frac{1}{2}\varphi_{xt}=\frac{1}{8}\varphi_{xxxx}+\frac{3}{2}(u_1^2\varphi_x)_x+\frac{3}{4}(u_1\varphi_{xx})_x-$$

$$\frac{3}{4}(v_2\varphi_x)_x-\frac{1}{2}\varphi_{xxt}=\frac{1}{8}\varphi_{xxxxx}-\frac{3}{4}u_1\varphi_{xxxx}-\frac{3}{4}u_{1xxx}\varphi_x-$$

$$\frac{3}{4}(u_{1x}\varphi_{xx})_x+\frac{3}{4}(v_2\varphi_{xx})_x-\frac{3}{2}(u_1^2\varphi_{xx})_x+3(u_1v_2\varphi_x)_x$$

$$\varphi^0: u_{1t}=\frac{1}{4}\varphi_{1xxx}+u_1^2u_{1x}-\frac{3}{2}u_1v_{2x}-\frac{3}{2}u_{1x}v_2$$

$$v_{2t}=\frac{1}{4}v_{2xxx}-3u_{1x}u_{1xx}-\frac{3}{2}u_1u_{1xxx}-\frac{3}{2}v_2v_{2x}+6u_1v_2u_{1x}+3u_1^2v_{2x}$$

利用相容条件 $v_2=-u_{1x}$, 经过繁琐计算, 可得到 φ满足

$$\frac{\varphi_t}{\varphi_x}+\frac{1}{2}\{\varphi;x\}=0.$$

因此, 式(3)是 Boussinesq-Burgers 方程(2)的 Backlund-Darboux 变换.

2 Boussinesq-Burgers 方程的孤立子解

下面从平凡的种子解 $u_1=0$, $v_2=0$ 出发, 通过以上给出的 Backlund-Darboux 变换, 求得方程的孤子解. 由于施瓦兹导数方程的解在 Moebius 变换

$$\varphi \to \frac{a\varphi + b}{c\varphi + d}, \qquad ab \neq cb$$

下不变[3], 即其解仍满足施瓦兹导数方程. 选取施瓦兹导数方程(4)的解为

$$\varphi = \frac{e^{\eta_1} + a}{e^{\eta_2} + b}, \qquad \eta_i = px + \omega t + k_i.$$

上式中: $i = 1, 2$; $k_1 = \eta_0 + \ln c$, $k_2 = \eta_0 + \ln d$; $ad \neq cb$; $p = \pm\sqrt{-2\lambda}$; $\omega = \pm\frac{1}{2}\lambda\sqrt{-2\lambda}$. 其中, λ, k_1, k_2, a, b 为常数.

(a) 当 $\lambda < 0$ 时, 利用 Backlund-Darboux 变换(3), 可得到 Boussinesq-Burgers 方程的一个孤立子解, 即

$$u = \frac{1}{2}(\ln\varphi)_x - \frac{1}{2}\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{e^{\eta_1} + a}{e^{\eta_2} + b}\right)_x - \frac{p}{2}\frac{e^{\eta_1} + b - 2}{e^{\eta_2} + b},$$

$$v = \frac{1}{2}(\ln\varphi)_{xx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}\right)_x = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{e^{\eta_1} + a}{e^{\eta_2} + b}\right)_{xx} + \frac{p}{2}\left(\frac{e^{\eta_1} + b - 2}{e^{\eta_2} + b}\right)_x.$$

(b) 当 $\lambda > 0$ 时, 得到 Boussinesq-Burgers 方程的一个周期解为

$$u = \frac{1}{2}(\ln\varphi)_x - \frac{1}{2}\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{c(\cos\xi + i\sin\xi) + a}{d(\cos\xi + i\sin\xi) + b}\right)_x - \frac{p}{2}\frac{d(\cos\xi + i\sin\xi) + b - 2}{d(\cos\xi + i\sin\xi) + b},$$

$$v = \frac{1}{2}(\ln\varphi)_{xx} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}\right)_x =$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{c(\cos\xi + i\sin\xi) + a}{d(\cos\xi + i\sin\xi) + b}\right)_{xx} + \frac{p}{2}\left(\frac{d(\cos\xi + i\sin\xi) + b - 2}{d(\cos\xi + i\sin\xi) + b}\right)_x.$$

$$\varphi = \frac{c(\cos\xi + i\sin\xi) + a}{d(\cos\xi + i\sin\xi) + b}, \qquad \xi = \pm\sqrt{2\lambda} \pm \frac{1}{2}\lambda\sqrt{2\lambda}, \qquad ab \neq cb.$$

参考文献:

[1] WEISS J. On classes of integrable system and the Painlevé property[J]. J Math Phys, 1984, 25(1): 13-14.

[2] CONTE R, FORDY A P, PICKERING A. A perturbative Painlevé approach to nonlinear differential equations[J]. Physica (D), 1993, 69(1/2): 33-58.

[3] CLARKSON P A. Painlevé equations-nonlinear special functions[J]. J Comp Appl Math, 2003, 153(1/2): 127-140.

[4] ZHANG Jin-shun, WU Yong-tang, LI Xue-mei. Quasi-periodic solution of the (2+1)-dimensional Boussinesq-Burgers soliton equation[J]. Physica (A), 2003, 319: 213-232.

Painlevé Test and Exact Solutions for Higher Order Boussinesq-Burgers Equation

LI Jin-wei, ZHANG Jin-shun

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The Painlevé test method is used to higher order Boussinesq-Burgers equation. The integrability of the equation is proved. A Backlund-Darboux transformation and exact solutions are obtained for the equation.

Keywords: Painlevé test; higher Boussinesq-Burgers equation; resonances; backlund-darboux transformation; solitonian solution

(责任编辑: 陈志贤　　英文审校: 张金顺, 黄心中)