第 31 卷　第 2 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 31　No. 2
2010 年 3 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Mar. 2010

文章编号:　1000-5013(2010)02-0205-05

一种改进的 Wilson-θ 法及其计算稳定性

黄庆丰

(华侨大学 土木工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要:　考虑系统计算运动参数的协调, 运用系统的动力平衡改进 Wilson-θ 法积分. 近似认为时间步长内, 系统平衡方程与 Wilson-θ 法计算假定附加的系统运动约束条件的不协调程度不变, 时间步长内产生的不平衡计算加速度, 分量将为常量, 由此导出时间步长终点的系统修正位移、速度和加速度计算式. 结果表明, 改进算法保留了 Wilson-θ 法在 θ ≥1.37 时的无条件计算稳定性. 算例结果显示, 当时间步长取 0.28 s 时, 改进算法减少约 85% 的相对误差, 且明显减小了 Wilson-θ 法的超越现象.

关键词:　Wilson-θ 法; 修正计算; 平衡方程; 附加运动; 约束条件

中图分类号:　TU 311.2　　　文献标识码:　A

Wilson-θ 法属差分型时程积分算法, 由于当 θ ≥1.37 时, 它是无条件计算稳定的, 因此在结构系统振动分析和振动控制等领域有着广泛的应用. Wilson-θ 法假定了计算时间段 τ(τ= θ · Δt) 内的加速度线性变化[1], 进而确定计算时间段 Δt 终点的位移、速度和加速度. 由于计算假设相当于对系统施加一个附加的运动约束条件, 与系统的平衡条件存在不协调关系. 若系统的计算位移、速度和加速度符合计算假设条件, 则不满足平衡条件; 若使其满足平衡条件, 则又不符合运动约束条件, 容易产生计算累积误差. 此外, Wilson-θ 法的计算结果存在很强的超越现象. 鉴于此, 本文提出一种改进的 Wilson-θ 法逐步积分算法, 并采用具体算例比较两者的计算结果.

1　Wilson-θ 法及其计算稳定性

1.1　Wilson-θ 法的主要算式[2]

系统的动力平衡方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{r}(t). \tag{1}$$

式(1) 中: $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}$ 分别为系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{r}(t)$ 分别为系统的位移向量和动力荷载向量. 给定系统的初始位移、初始速度和动力荷载初值, Wilson-θ 法有如下几个主要算式.

(1) τ 时间段的系统等效刚度矩阵, 有

$$\bar{\boldsymbol{k}}_\tau=\boldsymbol{K}+\frac{6}{\tau^2}\boldsymbol{M}+\frac{3}{\tau}\boldsymbol{C}. \tag{2}$$

(2) τ 时间段的系统位移增量, 有

$$\Delta\boldsymbol{x}_\tau(t_i)=\bar{\boldsymbol{k}}_\tau^{-1}\Delta\boldsymbol{x}_\tau(t_i). \tag{3}$$

(3) Δt 时间段的系统加速度增量, 有

$$\Delta\ddot{\boldsymbol{x}}(t_i)=\frac{1}{\theta}\left[\frac{6}{\tau^2}\Delta\boldsymbol{x}_\tau(t_i)-\frac{6}{\tau}\dot{\boldsymbol{x}}(t_i)-3\ddot{\boldsymbol{x}}(t_i)\right]. \tag{4}$$

(4) Δt 时间段系统位移和速度增量, 有

$$\Delta\boldsymbol{x}(t_i)=\dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\Delta t+\left[\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{x}}(t_i)+\frac{1}{6}\Delta\ddot{\boldsymbol{x}}(t_i)\right]\Delta t^2, \tag{5}$$

收稿日期:　2009-03-15

通信作者:　黄庆丰(1966-), 男, 副教授, 主要从事结构抗震的研究. E-mail: hqingfeng@hqu.edu.cn.

基金项目:　国家自然科学基金资助项目(10872072); 华侨大学高层次人才科研启动项目(05BS305)

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t_i) = [\ddot{\boldsymbol{x}}(t_i) + \frac{1}{2}\Delta\ddot{\boldsymbol{x}}(t_i)]\Delta t. \tag{6}$$

将时间步长起点的位移、速度及加速度加上时间段内的增量式,分别得到时间步长终点的位移、速度和加速度. 即

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t_{i+1}) &= \boldsymbol{x}(t_i) + \Delta\boldsymbol{x}(t_i), \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) &= \dot{\boldsymbol{x}}(t_i) + \Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t_i), \\ \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) &= \ddot{\boldsymbol{x}}(t_i) + \Delta\ddot{\boldsymbol{x}}(t_i). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

文[3]为提高计算精度,采用将时间步长终点的位移和速度代入动平衡方程,求时间步长终点的加速度,并将此法称为修正的 Wilson-θ法. 即

$$\dddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) = \boldsymbol{M}^{-1}[\boldsymbol{r}(t_{i+1}) - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t_{i+1})]. \tag{8}$$

1.2 Wilson-θ 法的无条件计算稳定性[2]

以单自由度系统为例说明 Wilson-θ 法的无条件计算稳定性. 假定单自由度系统为线性的,则 $t+\Delta t$ 时刻的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_{t+\theta\Delta t} + 2\xi\omega\dot{\boldsymbol{x}}_{t+\theta\Delta t} + \omega^2\boldsymbol{x}_{t+\theta\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}_{t+\theta\Delta t}}{m} = f_{t+\theta\Delta t}. \tag{9}$$

由于计算假设系统的加速度线性变化,位移的 3 阶以上导数为零. 在 t 时刻将位移展开成 Taylor 级数,得 $t+\theta\Delta t$ 时刻的系统位移、速度和加速度,然后代入式(9),可得递推关系为

$$\boldsymbol{X}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{L}f_{t+\tau}. \tag{10}$$

式(10)中:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 叫做渐近算子,矢量 $\boldsymbol{L}$ 叫着荷载算子,它们都仅与参数 θ,ξ和 $\Delta t/T$ 有关(T 为单自由度系统的自振周期);$\boldsymbol{X}_{t+\Delta t}$ 及 $\boldsymbol{X}_t$ 为存放系统位移、速度和加速度的向量,有

$$\boldsymbol{X}_{t+\Delta t} = \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_{t+\Delta t} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{t+\Delta t} \\ \boldsymbol{x}_{t+\Delta t} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}_t = \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_t \\ \dot{\boldsymbol{x}}_t \\ \boldsymbol{x}_t \end{pmatrix}. \tag{11}$$

反复应用式(11),可得 $t+n\Delta t$ 时刻的系统位移、速度和加速度矩阵,即

$$\boldsymbol{X}_{t+n\Delta t} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{L}f_{t+\tau} + \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{L}f_{t+\Delta t+\tau} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}f_{t+(n-2)\Delta t+\tau} + \boldsymbol{L}f_{t+(n-1)\Delta t+\tau}. \tag{12}$$

如果在任何初始条件和时间步长,数值积分的结果不会无界地放大,则数值积分是无条件稳定的.

假定 $f=0$,考察式(12)有

$$\boldsymbol{X}_{t+n\Delta t} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_t. \tag{13}$$

渐近算子矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相当于积分格式. 当 $n\to\infty$时,$\boldsymbol{A}^n\to 0$ 的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})<1$. 即

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max|\lambda_i|, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{14}$$

式(14)中:λ_i 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. $\rho(\boldsymbol{A})=1$ 时,则当 $n\to\infty$时 $\boldsymbol{A}^n$ 为有界. 数值积分的稳定性取决于渐近算子矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})$ 大小.

渐近算子矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只与参数 θ,ξ和 $\Delta t/T$ 有关. 若给出 $\Delta t/T$ 和ξ,就可以找出 $\rho(\boldsymbol{A})$ 与θ之间的关系,如图 1 所示. 从图 1 可以得出,当θ≥1.37 时 Wilson-θ 法的无条件计算稳定性.

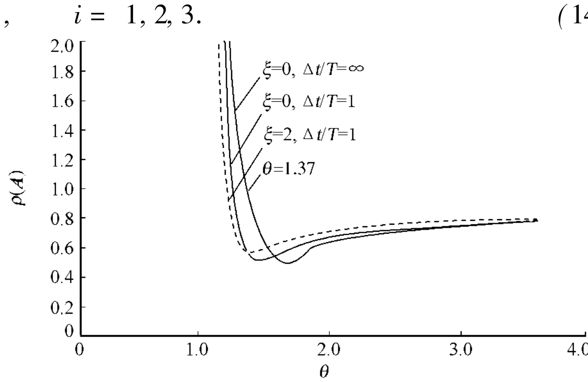

图 1 Wilson-θ 法的谱半径ρ(**A**)与θ关系曲线

Fig. 1 Relationship between spectral radius ρ(**A**) and θ in Wilson-θ method

2 系统平衡方程的合理运用

采用将时间步长终点的位移和速度代入平衡方程(8),重新计算平衡加速度,以减少计算误差积累. 这一方法破坏了式(10)的递推关系,也破坏了原 Wilson-θ 法的无条件计算稳定性. 此外,式(8)的计算结果满足平衡条件,但又不符合运动约束条件,仍存在计算运动状态不协调[4].

由于计算假设附加的系统运动约束条件不符合实际, Wilson-θ 法在时间步长内将产生的一个不平衡计算加速度分量. 考虑到附加运动约束同平衡方程的不协调关系始终存在, 且近似认为在时间步长内其不协调程度基本不变; 在计算时间步长内的每一时刻, 不平衡计算加速度分量始终存在, 且近似认为是一常量.

文[5]采用补充能量方程, 导出了 Δt 时间段内系统计算位移偏移修正量同不平衡计算加速度分量的关系, 则 τ时间段内相应可表示为

$$\delta \boldsymbol{x}_\tau(t_i) = \theta^2 \boldsymbol{K}_\tau^{-1} \boldsymbol{M} \delta \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}). \tag{15}$$

式(15)中: $\delta \boldsymbol{x}_\tau(t_i)$ 为 τ时间段内的计算位移偏移修正量; $\delta \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1})$ 为时间步长终点的不平衡计算加速度分量. 即

$$\delta \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) = \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) - \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}). \tag{16}$$

其中: $\boldsymbol{x}(t_{i+1})$, $\dot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1})$ 分别按式(7), (8)计算的时间步长终点加速度.

确定出计算位移偏移量后, 近似按 Δt 时间段内加速度不平衡分量为常数, 确定加速度和速度修正量, 有

$$\left.\begin{aligned} \delta \ddot{\boldsymbol{x}}(t_i) &= \frac{2}{\theta^2 \Delta t^2} \delta \boldsymbol{x}_\tau(t_i), \\ \delta \dot{\boldsymbol{x}}(t_i) &= \frac{2}{\theta^2 \Delta t^2} \delta \boldsymbol{x}_\tau(t_i), \\ \delta \boldsymbol{x}(t_i) &= \frac{1}{\theta^2} \delta \boldsymbol{x}_\tau(t_i). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

相应地, 将式(7)修正为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t_{i+1}) &= \boldsymbol{x}(t_i) + \Delta \boldsymbol{x}(t_i) + \delta \boldsymbol{x}(t_i), \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) &= \dot{\boldsymbol{x}}(t_i) + \Delta \dot{\boldsymbol{x}}(t_i) + \delta \dot{\boldsymbol{x}}(t_i), \\ \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) &= \ddot{\boldsymbol{x}}(t_i) + \Delta \ddot{\boldsymbol{x}}(t_i) + \delta \ddot{\boldsymbol{x}}(t_i). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

为方便叙述, 将式(15)~ (18)的修正计算称为改进 1.

改进 1 的计算一般不可能完全消除运动约束条件与平衡方程的不协调, 仍存在的加速度不平衡分量. 假设 $\delta \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1})$, 显然有

$$\boldsymbol{M}[\ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) + \delta \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t_{i+1}) = \boldsymbol{r}(t_{i+1}). \tag{19}$$

将 $\boldsymbol{M}\delta \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1})$移项作为荷载, 在下一时间段 τ的计算中加以抵消. 则有

$$\delta \boldsymbol{r}(t_{i+1}) = - \boldsymbol{M}\delta \ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) = \boldsymbol{r}(t_{i+1}) - \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t_{i+1}), \tag{20}$$

而下一时间段 τ的荷载增量改变为

$$\Delta \boldsymbol{r}^*_\tau(t_{i+1}) = \Delta \boldsymbol{r}_\tau(t_{i+1}) + \theta^2 \delta \boldsymbol{r}(t_{i+1}). \tag{21}$$

式(21)采用滞后一个时间步修正前一时间步长内的计算状态偏移误差, 以期待计算位移、速度及加速度既符合运动约束条件又满足平衡条件, 提高系统计算运动的协调性和减少计算结果误差. 将式(15)~(21)的修正计算称为改进 2.

3　改进方法的计算稳定性

仍然采用单自由度系统为例说明. 由式(9)及式(10), 可导出 Δt 时间步长终点系统的计算不平衡加速度分量, 有

$$\delta \ddot{x}(t_{i+1}) = - [1, 2\xi\omega, \omega^2] \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i + a f_{i+\tau}. \tag{22}$$

将式(22)代入式(15), 可得

$$\delta x(t_{i+1}) = - \frac{\theta^2}{\omega^2}[1, 2\xi\omega, \omega^2] \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i + b f_{i+\tau}. \tag{23}$$

系统的位移、速度和加速度修正量为

$$\delta \boldsymbol{X}_{i+\Delta t} = - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i + \tilde{\boldsymbol{L}} f_{i+\tau}, \tag{24}$$

式(24)中: 矢量 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 为与 $\boldsymbol{L}$, ξ及 ω有关的算子; $\boldsymbol{B}$ 为系数矩阵, 有

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\omega^2 \Delta t^2} & \frac{4\xi}{\omega \Delta t^2} & \frac{2}{\Delta t^2} \\ \frac{2}{\omega^2 \Delta t} & \frac{4\xi}{\omega \Delta t} & \frac{2}{\Delta t} \\ \frac{1}{\omega^2} & \frac{2\xi}{\omega} & \frac{2}{1} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

系统的修正位移、速度和加速度为

$$\boldsymbol{X}_{t+\Delta t} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_t + \tilde{\boldsymbol{L}} f_{t+\tau}. \tag{26}$$

式(26)中: $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 为修正后的荷载算子. 因 $\theta \geqslant 1.37$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$, 故式(15)~(18)修正计算的稳定性取决于式(26)中矩阵 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$ 的谱半径大小.

考察矩阵行列式 $|(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$, 展开后方程中仅含参数 ξ 和 $\Delta t / T$. 经过进一步计算, 可以确定矩阵 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = 1$. 显然, 式(15)~(18)的修正计算不影响 Wilson-θ 法当 $\theta \geqslant 1.37$ 时的无条件计算稳定性.

式(22)采用滞后一步作修正计算, 因此不影响式(10)中的渐进算子, 不影响原 Wilson-θ 法当 $\theta \geqslant 1.37$ 时的无条件计算稳定性.

4 算例计算

以文[6]的计算验证算例作为比较. 求动力方程

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix},$$

其初始条件 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$.

采用 Wilson-θ 法和所改进方法 1, 2 分别进行计算, 结果如表 1 所示.

表 1 不同时间步长的位移计算结果

Tab. 1 Results of calculation displacement for different time steps

t/s	位移	$\Delta t = 0.28$ s				$\Delta t = 0.07$ s			
		精确解	Wilson-θ 法	改进 1	改进 2	精确解	Wilson-θ 法	改进 1	改进 2
0.28	x_1	0.003	0.006	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.003
	x_2	0.382	0.366	0.378	0.378	0.382	0.379	0.381	0.382
0.56	x_1	0.038	0.053	0.043	0.043	0.038	0.042	0.039	0.038
	x_2	1.412	1.334	1.391	1.393	1.412	1.396	1.410	1.410
0.84	x_1	0.176	0.202	0.184	0.183	0.176	0.183	0.176	0.176
	x_2	2.781	2.607	2.738	2.744	2.781	2.740	2.778	2.778
1.12	x_1	0.486	0.504	0.491	0.491	0.486	0.495	0.486	0.486
	x_2	4.096	3.830	4.041	4.047	4.096	4.023	4.090	4.090
1.40	x_1	0.996	0.968	0.987	0.990	0.996	0.998	0.995	0.996
	x_2	4.996	4.706	4.957	4.961	4.996	4.908	4.994	4.994
1.68	x_1	1.657	1.539	1.626	1.632	1.657	1.639	1.654	1.655
	x_2	5.291	5.074	5.291	5.287	5.291	5.209	5.292	5.291
1.96	x_1	2.338	2.109	2.287	2.295	2.338	2.290	2.335	2.335
	x_2	4.985	4.937	5.039	5.026	4.985	4.941	4.990	4.989
2.24	x_1	2.861	2.539	2.803	2.809	2.861	2.782	2.857	2.857
	x_2	4.227	4.438	4.371	4.353	4.227	4.288	4.284	4.283
2.52	x_1	3.052	2.704	3.009	3.010	3.052	2.955	3.050	3.049
	x_2	3.457	3.791	3.561	3.545	3.457	3.524	3.464	3.464
2.80	x_1	2.801	2.536	2.804	2.795	2.801	2.716	2.807	2.806
	x_2	2.806	3.200	2.877	2.870	2.806	2.904	2.809	2.811

由表 1 可以得到以下 3 点结论.

(1) 对 Wilson-θ 法的改进, 很大幅度提高了计算精度, 减少了 85% 左右的计算结果相对误差. 当

时间步长 Δt 为 0.07 s 时, 改进方法的计算结果已接近精确解, 而原 Wilson-θ 法的计算结果仅与时间步长 Δt 为 0.28 s 时的改进方法的计算结果精度相当.

(2) 超越现象指高阶振型或时间步长过大对初始计算的影响. 改进方法的前几步计算及后续计算的结果误差相当, 明显减小了原 Wilson-θ 法的超越现象.

(3) 改进 Wilson-θ 法的改进 2 是在改进 1 的基础上增加一次滞后一步的重新平衡, 这对进一步提高计算结果精度的效果不明显. 说明, 用改进 1 计算位移、速度和加速度已基本满足平衡方程, 而改进 2 的算法仅保留了 Wilson-θ 法当 θ ≥1.37 时的计算无条件稳定性. 通过其他算例分析, 同样显示算法取得了类似的计算效果.

5 结束语

为尽量地使 Wilson-θ 法计算时间步长终点的计算速度、位移和加速度满足平衡方程, 采用不平衡计算加速度分量来修正这些计算运动参数, 同时注意到计算不平衡加速度是由于附加运动约束条件与平衡方程不协调而产生, 且近似认为不协调程度在时间步长内始终不变, 即认为计算不平衡加速度在时间步长内是一个常量, 进而导出了修正计算式. 改进方法实质上是合理运用系统平衡方程对 Wilson-θ 法的计算假设提出了修正. 改进方法保留了 Wilson-θ 法当 θ ≥1.37 时的无条件计算稳定性. 很大程度提高了计算精度, 明显减小了 Wilson-θ 法的超越现象.

参考文献:

[1] BATHE K J, WILSON E L. Numerical methods in finite analysis[M]. New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1976.

[2] 俞载道. 结构动力学基础[M]. 上海: 同济大学出版社, 1987.

[3] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of structures[M]. New York: McGraw-Hill Inc, 1975.

[4] 黄庆丰, 王全凤. Wilson-θ 法时程积分的运动约束和计算扰动[J]. 计算力学学报, 2005, 22(4): 477-481.

[5] 黄庆丰, 王全凤, 胡云昌. 时程积分过程中的结构运动参数协调[J]. 固体力学学报, 2004, 25(1): 7-10.

[6] 秦荣. 计算结构力学[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

An Improved Wilson-θ Method and Its Calculation Stability

HUANG Qing-feng

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: An improved Wilsion-θ method is proposed for step-by-step integral on dynamic equation. It is assumed that the non-coordination degree is unchanged between the dynamic equation of system and the additional kinematic constraint condition given by calculation hypothesis of Wilsion-θ method, so the nonequilibrium component of calculation acceleration would be a constant, thereby, the revised formula is educed to calculate the displacement, velocity and acceleration of system at the end of time step. The unconditional stability of Wilsion-θ method for θ ≥1.37 is preserved in the improved method, and examples show that, for 0.28 second time step, the improved method decreases the error of Wilson-θ method by about 85%, and the transcend of Wilsion-θ method is eliminated greatly.

Keywords: Wilsion-θ method; modified computation; dynamic equation; additional motion; constraint condition

(责任编辑: 钱筠　　英文审校: 方德平)