第 31 卷 第 1 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 31 No. 1
2010 年 1 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2010

文章编号: 1000-5013(2010)01-0118-03

关于扇形图 $P_1 \vee P_n$ 的零维数

邱 睿, 郝艳华

(华侨大学 机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究特殊图类扇形图 $P_1 \vee P_n$ 的零维数情况. 对 $n+1$ 阶扇形图 $G=P_1 \vee P_n$ 的某些顶点与边进行移除, 得到一个保持零维数不变的子图 H; 通过计算 $\eta(H)$, 得到扇形图 G 的零维数集{0, 1}, 从而完整的刻画扇形图的零维数情况.

关键词: 邻接矩阵; 谱; 零维数; 扇形图; 奇异性

中图分类号: O 157.6 文献标识码: A

1 研究背景

设 G 是 n 阶简单图, 图 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 是一个 $n \times n$ 阶对称矩阵 $\boldsymbol{a}_{i,j}$. 其中: 当顶点 v_i 与顶点 v_j 相邻时, $\boldsymbol{a}_{i,j}=1$; 当顶点 v_i 与顶点 v_j 不相邻时, $\boldsymbol{a}_{i,j}=0$. $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值也称为图 G 的特征值. 图 G 的 n 个特征值构成的集合(多重集)称为图 G 的谱. 在图 G 的谱中零特征值的重数称为 G 的零维数, 则记为 $\eta(G)$, 图 G 称为非奇异的. 如果 $\eta(G)$, 令 G_n 为所有 n 阶简单图组成的集合; $G'_n \subseteq G_n$, 称数集 $\{\eta(G) \in N \mid G \in G'_n\}$ 为 G'_n 的零维数集.

1957 年, Collatz 等[1] 在基于分子结构稳定性的问题下, 首先提出了关于图的奇异性刻画问题. 这个问题无论在化学中, 还是在数学中都有很重要的意义. 对于一个二部图 G(相应于一个碳氢化合物的分子图)来说, $\eta(G)>0$ 意味着这种图所代表的分子是不稳定的. 由矩阵论知识易见, $\eta(G)>0$, 当且仅当 $\boldsymbol{A}(G)$ 奇异, 这对数学学科本身的研究也很有意义.

目前, 关于图的奇异性刻画问题尚未完全解决, 仅局限于一些简单的情形, 如树、单圈图、双圈图, 以及图的零维数取极值情况等[2-10]. 本文主要讨论扇形图的零维数集.

2 定义和引理

设 G 是简单图, 具有顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$. 对于任意顶点 $v \in V(G)$, 用记号 $d(v)$ 和 $N(v)$ 分别表示 v 的度和邻集, $v(G)$ 表示 G 的顶点数. 由矩阵论知识易得, 如果有 $\boldsymbol{A}(G)$ 的秩为 r, 则 $\eta(G)=v(G)-r$.

定义 **1** 设 P_n 是具有 n 个顶点的一条路, P_1 与 P_n 的联图记为 $P_1 \vee P_n$, 称为扇形图(图 1).

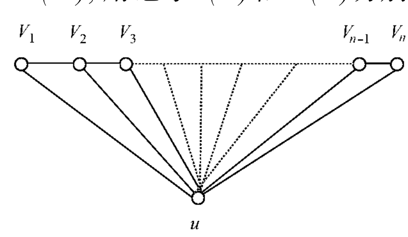

图 1 扇形图 $P_1 \vee P_n$

Fig. 1 The fan graph $P_1 \vee P_n$

引理 **1**[2] (1) 设 G 为 n 阶简单图, 若 G 中存在悬挂边, 删除此悬挂边(连同两个顶点及其关联的边)所得新图, 其零维数保持不变; (2) 设 $G_1, G_2, \cdots, G_t$ 为图 G 的 t 个连通分支, 有 $G=\bigcup_{i=1}^{t} G_i$, 则 $\eta(G)=\sum_{i=1}^{t}\eta(G_i)$; (3) 设 K_n 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶完全图, 则 $\eta(K_n)=0$, $\eta(K_1)=1$.

引理 **2** 设 G 为 n 阶简单图, $u \in V(G)$ 且 $d(u) \geqslant 2$, $N(u)=\{v_1, v_2, \cdots, v_{d(u)}\}$. 若 $\bigcap_{i=1}^{d(u)} N(v_i)-\{u\} \neq$

收稿日期: 2008-06-25

通信作者: 郝艳华(1956-), 女, 研究员, 主要从事计算机辅助机械设计的研究. E-mail: haoyh@hqu.edu.cn.

Ø $E' = \{xy \in E(G) \mid x \in N(u), y \in \bigcap_{i=1}^{d(u)} N(v_i) - \{u\}\}$, 则 $\eta(G) = \eta(H)$. 其中: H 是将 G 中属于 E' 的边删去而得到的子图.

证明　不失一般性, 令 G 的邻接矩阵为

$$A(G) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} u & v_1 & v_2 & K & v_{d(u)} & v_{d(u)+1} & K & v_{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ v_1 \\ v_2 \\ M \\ v_{d(u)} \\ v_{d(u)+1} \\ M \\ v_{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & K & 1 & 0 & K & 0 \\ 1 & 0 & * & K & * & 1 & K & * \\ 1 & * & 0 & K & * & 1 & K & * \\ M & M & M & M & M & M & M & M \\ 1 & * & * & K & 0 & 1 & K & * \\ 0 & 1 & 1 & K & 1 & 0 & K & * \\ M & M & M & M & M & M & K & * \\ 0 & * & * & K & * & * & K & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

对任意顶点 $w \in \bigcap_{i=1}^{d(u)} N(v_i) - \{u\}$, 不妨设 $w = v_{d(u)+1}$. 在第 $d(u)+2$ 行中减去第 1 行, 第 $d(u)+2$ 列中减去第 1 列, 所得矩阵的秩保持不变. 另一方面, 上述变换后得到的矩阵, 所对应的图即是通过在 G 中删除边 $v_i v_{d(u)+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant d(u))$ 得到的. 反复此变换, 可以得到 $A(H)$, 且 $r(G) = r(H)$, $v(G) = v(H)$, 从而有 $\eta(G) = \eta(H)$.

引理 3　设 $G = (K_2 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_2) \vee K_1$ 为 $n+1$ (K_i ($i = 1, 2$) 为 i 阶完全图, n 为偶数, $\cup$ 表示不交并) 阶简单图, $\eta(G) = 0$, 如图 2 所示.

证明　不失一般性, 令 G 的邻接矩阵为

$$A(G) = \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & L & 0 & 0 \\ L & L & L & L & L & L & L & L \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

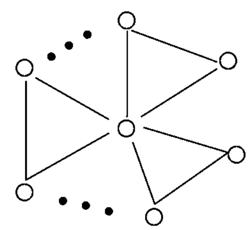

图 2　$n+1$ 阶简单图

Fig. 2　A simple graph of order $n+1$

则 $|A(G)| = (-1)^{\frac{n}{2}+1} n \neq 0$, 即 $A(G)$ 非奇异, 故 $\eta(G) = 0$.

3　主要结果

定理 1　设 $G = P_1 \vee P_n$ 为 $n+1$ 阶扇形图, 则有 $\eta(G) = \begin{cases} 1, & n \equiv 3 (\mathrm{mod} 4), \\ 0, & n \not\equiv 3 (\mathrm{mod} 4). \end{cases}$

证明　设 $P_n = v_1 v_2 K v_n$, $P_1 = u$.

(1) 当 $n = 1$ 时, $G = K_2$, $\eta(G) = 0$;

(2) 当 $n = 2$ 时, $G = K_3 = K_2 \vee K_1$. 由引理 3 可得, $\eta(G) = 0$;

(3) 当 $n = 3$ 时, $G = P_1 \vee P_3$. $N(v_1) = \{u, v_2\}$ 且 $N(u) \cap N(v_2) - \{v_1\} = \{v_2\}$. 由引理 2, 将边 uv_3 和 $v_2 v_3$ 删除得到图 H, $\eta(G) = \eta(H) = 1$. 其中: $H = K_3 \cup K_1 = (K_2 \vee K_1) \cup K_1$.

(4) 当 $n = 4$ 时, $G = P_1 \vee P_4$. $N(v_1) = \{u, v_2\}$ 且 $N(u) \cap N(v_2) - \{v_1\} = \{v_3\}$. 由引理 2, 将边 uv_3 和 $v_2 v_3$ 删除, 不改变图的零维数, 此时 $v_3 v_4$ 为一悬挂边. 由引理 1, 将这条边(连同顶点 v_3, v_4 及边 $v_4 u$) 删除得到新图 H, $\eta(G) = \eta(H) = 0$. 其中: $H = K_3 = K_2 \vee K_1$.

(5) 当 $n = 5$ 时, $N(v_1) = \{u, v_2\}$ 且 $N(u) \cap N(v_2) - \{v_1\} = \{v_3\}$. 由引理 1, 2, 将边 uv_3 和 $v_2 v_3$ 删除, 不改变图的零维数. 此时 $v_3 v_4$ 为一悬挂边. 将这条边(连同顶点 v_3, v_4 及边 $v_4 v_5$, $v_4 u$) 删除, 则得到的新图保持零维数不变, 且 $v_5 u$ 为悬挂边. 将 $v_5 u$ (连同顶点 v_5, u 及边 uv_1, uv_2) 删除, 得到新图 H, 且 $\eta(G) =$

$\eta(H) = 0$. 其中: $H = K_2$.

(6) 当 $n = 6$ 时, $N(v_1) = \{u, v_2\}$ 且 $N(u) \cap N(v_2) - \{v_1\} = \{v_3\}$. 由引理 1, 2, 将边 uv_3 和 v_2v_3 删除, 不改变图的零维数. 此时 v_3v_4 为一悬挂边, 将这条边(连同顶点 v_3, v_4 及边 v_4v_5, v_4u) 删除, 得到新图 H, 且 $\eta(G) = \eta(H)$. 其中: $H = (K_2 \cup K_2) \vee K_1$. 由引理 3 可得, $\eta(G) = \eta(H) = 0$.

(7) 当 $n \geqslant 7$ 时, $N(v_1) = \{u, v_2\}$ 且 $N(u) \cap N(v_2) - \{v_1\} = \{v_3\}$. 由引理 1, 2, 将边 uv_3 和 v_2v_3 删除, 不改变图的零维数. 此时, v_3v_4 为一悬挂边. 将这条边(连同顶点 v_3, v_4 及边 v_4v_5, v_4u) 删除, 得到的新图保持零维数不变, 如图 3 所示.

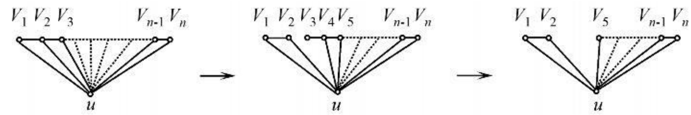

图 3 新图

Fig. 3 New graph

反复使用引理 1, 2, 可得到新图 H 且 $\eta(G) = \eta(H)$. 其中: 当 $n \equiv 0 \pmod 4$ 时, 有 $H = (K_2 \cup K_2 \cup \dots \cup K_2) \vee K_1$; 当 $n \equiv 1 \pmod 4$ 时, $H = K_2 \cup K_2 \cup \dots \cup K_2$; 而当 $n \equiv 2 \pmod 4$ 时, 有 $H = (K_2 \cup K_2 \cup \dots \cup K_2) \vee K_1$; 当 $n \equiv 3 \pmod 4$ 时, 有 $H = ((K_2 \cup K_2 \cup \dots \cup K_2) \vee K_1) \cup K_1$.

由引理 1, 3 可知, 当 $n \equiv 3 \pmod 4$ 时, $\eta(G) = \eta(H) = 1$; 而当 $n \not\equiv 3 \pmod 4$ 时, $\eta(G) = \eta(H) = 0$. 定理得证.

参考文献:

[1] COLLATZ L, SINOGOWITZ U. Spektren endlicher grafen[J]. Abh Math Sere Univ Hamburg, 1957, 21: 70-75.

[2] CVETKOVIC D, DOOB M, SACHS H. Spectra of graphs[M]. New York: Academic Press, 1980.

[3] TAN Xue-zhong, LIU Bo-lian. On the nullity of unicyclic graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2005, 408: 212-220.

[4] 李 薇, 常 安. 非奇异单圈图的刻划[J]. 数学研究, 2007, 40(4): 442-445.

[5] HU Sheng-biao, TAN xue-zhong, LIU Bo-lian. On the nullity of bicyclic graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2008, 429(7): 1387-1391.

[6] CHEN B, LIU B L. On the nullity of graphs[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2007, 16: 60-67.

[7] SCIRIHA I. On the construction of graphs of nullity one[J]. Discret Math, 1998, 181(1/3): 193-211.

[8] MILAN N, BHABA K S. On the null-spaces of acyclic and unicyclic singular graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2007, 427(1): 42-54.

[9] IVAN G, IRENE S. On the nullity of line graphs of tress[J]. Discrete Math, 2001, 232(1/3): 35-45.

[10] FIORINI S, GUTMAN I, SCIRIHA I. Trees with maximum nullity[J]. Linear Algebra Appl, 2005, 397: 245-251.

On the Nullity of Fan Graph $P_1 \vee P_n$

QIU Rui, HAO Yan-hua

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The nullity of fan graph $P_1 \vee P_n$ which is a special kind of graph is investigated. A subgraph, H, which keeps the same nullity, is obtained from $G = P_1 \vee P_n$ of order $n+1$ by removing some vertices and edges. A nullity set $\{0, 1\}$ of fan graph G is obtained by calculating the nullity of the fan graph G, $\eta(H)$, so that the nullity of the fan graph G could be perfectly characterized.

Keywords: adjacent matrix; spectrum; nullity; graph; singularity

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 吴逢铁)