第31卷 第1期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 31 No. 1
2010年1月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2010

文章编号: 1000-5013(2010)01-0113-05

一类二阶微分方程两点边值问题的正解存在性

曹君艳，王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用 Leggett-Williams 不动点定理, 研究一类二阶微分方程两点边值问题的正解存在性, 获得此方程的边值问题存在3个正解的新结果. 结果表明, 其存在性的充分条件简单, 且易于验证.

关键词: Leggett-Williams 不动点定理; 两点边值问题; 正解; 存在性

中图分类号: O 175.8　　文献标识码: A

由于二阶微分方程广泛的应用背景, 其受到许多学者的广泛关注[1-9]. 文[3-4]研究了二阶两点边值问题

$$\left.\begin{aligned} &-x''(t)=f(t,x(t)), \qquad t\in[0,1],\\ &x(0)=x(1)=0 \end{aligned}\right\}$$

的正解存在性. 其中, $f(t,x)$ 对 x 是超线性或次线性的. Li 等[7]讨论了两点边值问题, 即

$$\left.\begin{aligned} &-x''(t)=f(t,x(t)), \qquad t\in[0,1],\\ &x(0)=x'(1)=0, \end{aligned}\right\}$$

其至少有一个解和唯一解的存在性. 本文考察二阶两点边值问题

$$\left.\begin{aligned} &x''(t)+\lambda h(t)f(t,x(t))=0, \qquad t\in[0,1],\\ &x'(1)=x(0)=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

的多个正解的存在性问题. 其中, $h(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(t,x):[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续.

1 预备知识

首先, 引入如下几个定义及引理.

定义1 设 X 是一个 Banach 空间, $P\subset X$ 非空, 且满足两个条件: (a) 对任意的 $u,v\in P$ 和实数 $\alpha,\beta\geqslant0$, $\alpha u+\beta v\in P$ 成立; (b) 若 $u,-u\in P$, 必有 $u=0$, 则称 P 是 X 中的一个锥.

定义2 定义在 P 上的映射 Ψ: $P\to[0,\infty)$, 如果满足

$$\Psi(tx+(1-t)y)\geqslant t\Psi(x)+(1-t)\Psi(y), \qquad \forall x,y\in P, \quad 0\leqslant t\leqslant1,$$

则称映射 Ψ 是一个非负连续的凹泛函.

定义3 设常数 $0<a<b$, Ψ 是定义在 P 上的连续非负凹泛函, 定义

$$P_a=\{x\in P\mid \|x\|<a\}, \qquad \overline{P_a}=\{x\in P\mid \|x\|\leqslant a\},$$

$$P(\Psi,a,b)=\{x\in P\mid a\leqslant\Psi(x),\ \|x\|\leqslant b\}.$$

引理1[8] 即 Leggett-Williams 不动点定理. 设 $E=(E,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间, $P\subset E$ 为 E 上的一个锥. 设算子 $A:\overline{P_c}\to\overline{P_c}$ 全连续, 定义在 P 上的非负连续凹泛函 $\Psi(x)$, 满足 $\Psi(x)\leqslant\|x\|$, $\forall x\in\overline{P_c}$; 若存在常数 $0<r<a<b\leqslant c$, 使得以下3个条件成立.

(Ⅰ) 当 $\{x\in P(\Psi,a,b)\mid\Psi(x)>a\}\neq\Phi$, 且 $x\in P(\Psi,a,b)$ 时, $\Psi(Ax)>a$.

收稿日期: 2008-08-19

通信作者: 王全义(1955-), 男, 教授, 主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail: qywang@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026)

(Ⅱ) 当 $x\in\overline{P}_r$ 时，恒有 $\|Ax\|<r$.

(Ⅲ) 当 $x\in P(\Psi,a,b)$，且 $\|Ax\|>b$ 时，$\Psi(Ax)>a$. 那么，算子 A 在 P 上至少存在 3 个不动点 $x_1,x_2,x_3\in\overline{P}_c$，满足 $\|x_1\|<r$，$a<\Psi(x_2)$，$\|x_3\|>r$，$\Psi(x_3)<a$.

2　多重正解的存在性

边值问题(1) 的正解，是指除端点外应处处大于零的解. 设 $E=\{x\mid x\in C^1[0,1],x(0)=x'(1)=0\}$，定义 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|,x\in E$. 显然，$E$ 为一 Banach 空间. 定义 E 上的锥为

$$P=\{x(t)\mid x(t)\geqslant 0,\quad x\in E,\quad t\in[0,1]\}.$$

引理 **2**　$x=x(t)$ 是边值问题(1)的一个正解，当且仅当 $x=x(t)$ 是积分方程，有

$$x(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{2}$$

的一个正解. 其中，$G(t,s)=\min\{t,s\}$，$0\leqslant t,s\leqslant 1$.

证明　首先，假设 $x=x(t)$ 是边值问题(1)的一个正解. 事实上，将式(1)移项后可得

$$x''(t)=-\lambda h(t)f(t,x(t)).$$

对上式的两边同时从 t 到 1 积分，可得

$$x'(1)-x'(t)=-\lambda\int_t^1 h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

由边值 $x'(1)=0$，可得

$$x'(t)=\lambda\int_t^1 h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s. \tag{3}$$

再对式(3)从 0 到 t 积分，有

$$x(t)-x(0)=\lambda\int_0^t\mathrm{d}s\int_s^1 h(\tau)f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau=$$

$$\lambda\int_0^t sh(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\lambda\int_t^1 th(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

上式中，$G(t,s)=\min\{t,s\}$，$0\leqslant t,s\leqslant 1$. 由边值 $x(0)=0$ 可得式(2). 因此，$x=x(t)$ 是积分方程(2)的一个正解.

其次，假设 $x(t)$ 是积分方程(2)的一个正解. 于是，从式(2)右边可知，$x(t)\in C^1[0,1]$. 因此，对式(2)的两边同时对 t 求导，可得

$$x'(t)=\lambda\left[\int_0^t sh(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\int_t^1 th(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right]'=$$

$$\lambda th(t)f(t,x(t))+\lambda\int_t^1 h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s-\lambda th(t)f(t,x(t))=\lambda\int_t^1 h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s. \tag{4}$$

易见 $x'(1)=0$，且 $x'(t)$ 也是可导的. 因此，再对式(4)两边同时微分，可得

$$x''(t)=-\lambda h(t)f(t,x(t)),\qquad t\in[0,1].$$

由于 $G(0,s)=0$，故由式(2)可得 $x(0)=0$. 因此，$x=x(t)$ 是边值问题(1)的一个正解.

现假设条件 (S_1) $h(t)>0$，$t\in[0,1]$；(S_2) 存在非负且单调增加的连续函数 $\alpha(x)$，$\beta(x)$，$x\in[0,+\infty)$，满足 $\beta(x)>0(x\neq 0)$，并使得

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha(x)}{x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x}=0,\\&\beta(x)\leqslant f(t,x)\leqslant\alpha(x),\qquad t\in[0,1].\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

引理 **3**　如果条件(S_1)，(S_2)成立，则对于任意的 $\theta\in(0,1)$，必存在常数 $0<r<a<b\leqslant c$，使得以下不等式成立. 即

$$\frac{\alpha(r)}{r}<\frac{\alpha(c)}{c}, \tag{6}$$

$$\frac{a}{\beta(a)\int_\theta^1 G(\theta,s)h(s)\mathrm{d}s}<\frac{c}{\alpha(c)\int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s}, \tag{7}$$

$$b > \frac{a}{\theta}. \tag{8}$$

证明　由条件(S_1)和 $G(t,s)$ 的表达式可知, 对任意的 $\theta \in (0,1)$, 有

$$\int_\theta^1 G(\theta,s)h(s)\mathrm{d}s > 0, \qquad \int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s > 0.$$

再由条件(S_2)可知, $\frac{x}{\beta(x)}$在$(0,+\infty)$上连续且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\beta(x)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\beta(x)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\alpha(x)} = +\infty.$$

所以, $\frac{x}{\beta(x)}$在点 $x = a \in (0,+\infty)$ 取到最小值$\frac{a}{\beta(a)}$, 且存在正常数 c_0, $c_0 > \frac{2a}{\theta}$充分大, 使得当 $c \geqslant c_0$ 时, 就有

$$\frac{a\int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s}{\beta(a)\int_\theta^1 G(\theta,s)h(s)\mathrm{d}s} < \frac{c}{\alpha(c)},$$

即式(7)成立. 取$b = \frac{3a}{2\theta}$, 则式(8)也成立. 由于$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\alpha(x)}{x} = 0$, 故可取$0 < r < a$, 使得$\frac{\alpha(r)}{r} < \frac{\alpha(c)}{c}$, 即式(6)也成立. 引理 3 得证.

定理 1　假设如果方程(1)满足条件(S_1), (S_2), 则对于任意 $\lambda \in (a/[\beta(a)\int_\theta^1 G(\theta,s)h(s)\mathrm{d}s], c/[\alpha(c)\int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s])$ (正常数 θ, r, a, b 由引理 3 给定), 边值问题(1)至少存在 3 个正解 $x_1, x_2\ x_3$ 且满足 $\|x_1\| < r$, $a < \Psi(x_2)$, $\|x_3\| > r$, $\Psi(x_3) < a$.

证明　不妨假设

$$\lambda_1 = \frac{a}{\beta(a)\int_\theta^1 G(\theta,s)h(s)\mathrm{d}s}, \qquad \lambda_2 = \frac{c}{\alpha(c)\int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s}. \tag{9}$$

分别定义算子 $A: P \to E$, 以及泛函 $\Psi: P \to [0,\infty)$为

$$(Ax)(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,$$

$$\Psi(x) = \min_{\theta\leqslant t\leqslant1} x(t).$$

m 易见, Ψ在 P 上非负且连续. 对于任意 $x, y \in P$, $\mu \in [0,1]$, 有

$$\Psi(\mu x + (1-\mu)y) = \min_{\theta\leqslant t\leqslant1}(\mu x(t) + (1-\mu)y(t)) \geqslant$$

$$\min_{\theta\leqslant t\leqslant1}\mu x(t) + \min_{\theta\leqslant t\leqslant1}(1-\mu)y(t) =$$

$$\mu\min_{\theta\leqslant t\leqslant1}x(t) + (1-\mu)\min_{\theta\leqslant t\leqslant1}y(t) = \mu\Psi(x) + (1-\mu)\Psi(y).$$

所以, Ψ是P 上的非负连续凹泛函, 且有 $\Psi(x) \leqslant \|x\|$, $x \in P$.

以下证明$A: \overline{P}_c \to \overline{P}_c$ 是全连续的. 首先, 当 $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ 及$x \in \overline{P}_c$ 时, 由 $G(t,s) \leqslant G(1,s)$ $(0 \leqslant t, s \leqslant 1)$和式(7), (9), 以及条件($S_2$), 可得

$$\|Ax\| = \max_{0\leqslant t\leqslant1}\left|\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right| =$$

$$\lambda\int_0^1 G(1,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \leqslant \lambda\int_0^1 G(1,s)h(s)\alpha(x(s))\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\lambda\alpha(c)\int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s < \lambda_2\alpha(c)\int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s = C,$$

所以, $A(\overline{P}_c) \subset \overline{P}_c$. 由于$f(t,x)$在$[0,1]\times[0,c]$上一致连续, 即对 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$, $\forall t \in [0,1]$, 当 u_1, $u_2 \in [0,c]$且$|u_2 - u_1| < \delta$时, 有$|f(t,u_2) - f(t,u_1)| < \varepsilon$

对于上述$\forall\varepsilon > 0$, $\forall t \in [0,1]$, 对$\forall x_1, x_2 \in \overline{P}_c$, 只要 $\|x_1 - x_2\| < \delta$, 就有

$$|(Ax_2)(t) - (Ax_1)(t)| = \left|\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x_2(s))\mathrm{d}s - \lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x_1(s))\mathrm{d}s\right| \leqslant$$

$$\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)\,|\,f(s,x_2(s))-f(s,x_1(s))\,|\,\mathrm{d}s<$$

$$\lambda_2\varepsilon\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s=\frac{c\varepsilon\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s}{\alpha(c)\int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s}=\frac{c\varepsilon}{\alpha(c)},$$

即 A 在 $\overline{P}_c$ 上连续. 又因为

$$\frac{\mathrm{d}(Ax)(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda\int_t^1 h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda_2\alpha(c)\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s=:M,$$

则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_1=\frac{\varepsilon}{2M}>0$, $\forall t_2,t_1\in[0,1]$, $x\in\overline{P}_c$, 只要 $|t_2-t_1|<\delta_1$, 就有

$$|(Ax)(t_2)-(Ax)(t_1)|=|\lambda\int_t^1 h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s|\cdot|t_2-t_1|<M\delta_1=M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}<\varepsilon,$$

即 A 在 $\overline{P}_c$ 上等度连续. 易见, A 将 $\overline{P}_c$ 中的有界集映成有界集. 因此, 由 Arzela-Ascoli 定理可知, A: $\overline{P}_c\to\overline{P}_c$ 全连续.

取 $x(t)=\frac{a+b}{2}$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 则 $x\in P$ 且 $\Psi(x)=\min\limits_{\theta\leqslant t\leqslant 1}x(t)=\frac{a+b}{2}>a$, 即 $\{x\in P(\Psi,a,b)\,|\,\Psi(x)>a\}\neq\Phi$. 当 $x\in P(\Psi,a,b)$ 时, 由条件(S_2)和式(9)可得

$$\Psi(Ax)=\min_{\theta\leqslant t\leqslant 1}\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=$$

$$\lambda\int_0^1 G(\theta,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\int_0^1 G(\theta,s)h(s)\beta(x(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda\int_\theta^1 G(\theta,s)h(s)\beta(x(s))\mathrm{d}s>\lambda_1\beta(a)\int_\theta^1 G(\theta,s)h(s)\mathrm{d}s=a.$$

因此, 引理 1 的条件(Ⅰ)成立. 当 $x\in\overline{P}_r$ 时, 由条件(S_2)和式(6), (9)可得

$$\|Ax\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s|=$$

$$\lambda\int_0^1 G(1,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1 G(1,s)h(s)\alpha(x(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\lambda\alpha(r)\int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s<\lambda_2\alpha(r)\int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s=\frac{c\alpha(r)}{\alpha(c)}<r.$$

引理 1 的条件(Ⅱ)成立. 设 $x\in P(\Psi,a,c)$, $\|Ax\|>b$ 时, 由式(8), (9)可得

$$\Psi(Ax)=\min_{\theta\leqslant t\leqslant 1}\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=$$

$$\lambda\int_0^1 G(\theta,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\lambda\int_0^\theta sh(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\lambda\theta\int_\theta^1 h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda\int_0^\theta sh(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\lambda\theta\int_\theta^1 sh(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda\theta\left(\int_0^\theta sh(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\int_\theta^1 sh(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right)=$$

$$\lambda\theta\int_0^1 sh(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\lambda\theta\int_0^1 G(1,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=$$

$$\lambda\theta\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s|=\theta\|Ax\|>\theta b>a.$$

引理 1 的条件(Ⅲ)也成立. 即 A 在 $\overline{P}_c$ 中至少存在 3 个不动点, 边值问题(1)至少存在 3 个正解.

3 应用实例

对于边值问题(1), 设

$$h(t)=1,$$

$$f(t,x)=\begin{cases}x^2(2+\sin(t(1-x^2))), & 0\leqslant x<1,\\ \sqrt{x}(2+\sin(t(1-x^2))), & 1\leqslant x.\end{cases}$$

取

$$\alpha(x)=\begin{cases}3x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 3\sqrt{x}, & 1\leqslant x,\end{cases}$$

$$\beta(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x.\end{cases}$$

又取 $r=0.01$, $a=1$, $c=900$, $\theta=\frac{1}{2}$, 则有 $\beta(x)\leqslant f(t,x)\leqslant\alpha(x)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $\alpha(r)=0.000\,3$, $\beta(a)=1$, $\alpha(c)=90$, 以及

$$\lambda_1=\frac{a}{\beta(a)\int_\theta^1 G(\theta,s)h(s)\mathrm{d}s}=\frac{1}{\int_{1/2}^1 G(1/2,s)\mathrm{d}s}=4,$$

$$\lambda_2=\frac{c}{\alpha(c)\int_0^1 G(1,s)h(s)\mathrm{d}s}=\frac{900}{90\int_0^1 s\mathrm{d}s}=20.$$

那么, 边值问题(1)存在 3 个正解 x_1, x_2, x_3, 满足 $\|x_1\|<0.01$, $\Psi(x_2)>1$, $\|x_3\|<0.01$, $\Psi(x_3)<1$.

参考文献:

[1] 李永祥. 二阶非线性常微分方程正周期解[J]. 数学学报, 2002, 45(3): 481-488.

[2] 姚庆六. 一类二阶三点非线性边值问题的正解存在性与多解性[J]. 数学学报, 2002, 45(6): 1057-1064.

[3] ERBE L H, HU S, WANG H. Multiple positive solutions of some boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 1994, 184: 640-648.

[4] LIU Z, LI F. Multiple positive solutions of nonlinear two-point boundary value problem[J]. J Math Anal Appl, 1996, 203: 610-625.

[5] LI F Y, ZHANG Y J. Multiple symmetric nonnegative solutions of second-order ordinary differential equations[J]. Appl Math Lett, 2004, 17: 261-267.

[6] SUN J P. Three positive solutions for second-order Neumann boundary value problems[J]. Appl Math Lett, 2004, 17: 1079-1084.

[7] LI F Y, LIANG Z P, ZHANG Q. Existence of solutions to a class of nonlinear second order two-point boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 2005, 312: 357-373.

[8] LEGGETT W, WILLIAMS L R. Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces[J]. Indiana Univ Math J, 1979, 28: 673-688.

[9] 王全义. 具状态依赖时滞的泛函微分方程的周期解[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2007, 28(2): 212-215.

The Existence of Positive Solutions for Second-Order Two-Point Boundary Value Problem

CAO Jun-yan, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: By using Leggett-Williams fixed point theorem, the authors studied the existence of positive solutions for a kind of second-order two-point boundary value problem. A new result of three positive solutions for the boundary value problem is obtained.

Keywords: Leggett-Williams fixed point theorem; two-point boundary value problem; positive solution; existence

(责任编辑: 陈志贤　　英文审校: 张金顺, 黄心中)