第 31 卷　第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 31　No. 1
2010 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2010

文章编号: 1000-5013(2010)01-0106-03

q-类似 Virasoro-Like 代数的模

温琴珠

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要:　直接从任意维向量空间出发, 构造李代数 L_q 的一类模 $M(\alpha, a_1, a_2)$, 并研究其结构. 证明这一类模都是完全可约的, 并在不同参数情形给出了该模的全部不可约因子.

关键词:　量子环面; 导子; q-类似; Virasoro-Like 代数; 不可约模
中图分类号:　O 152.5　　　文献标识码:　A

记 $\mathbf{C}_q[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]$ 为复数域上的非交换罗朗多项式环, 且满足关系 $x_2x_1 = qx_1x_2$, 其中 $q\in\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\mathbf{0}$ 为非单位根. 另记 $\overline{L_q}$ 为 $\mathbf{C}_q[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]$ 的内导子代数, 则 $D(\boldsymbol{m}) = \mathrm{ad}(x^{\boldsymbol{m}})$, $\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2\backslash\mathbf{0}$ 构成向量空间 $\overline{L_q}$ 的一组基, 有

$$[D(\boldsymbol{m}), D(\boldsymbol{n})] = (q^{m_2n_1} - q^{m_1n_2})D(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}).$$

上式中: $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2)$, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)\in\mathbf{Z}^2\backslash\mathbf{0}$, $x^{\boldsymbol{m}} = x_1^{m_1}x_2^{m_2}$. $\overline{L_q}$ 为 q-类似 Virasoro-Like 代数, 记 $L_q = \overline{L_q}\oplus\mathbf{C}d_1\oplus\mathbf{C}d_2$. 其中: d_1, d_2 为 $\overline{L_q}$ 的度导子. 文[1]证明了 L_q 同构于 $\overline{L_q}$ 的导子李代数.

记 $\mathrm{Der}\,A_d$ 为 d 个变量交换罗朗多项式环的导子李代数, gl_d 为复数域上的一般线性李代数. Larsson[2] 构造了从 gl_d-模到 $\mathrm{Der}\,A_d$-模的函子 F^{α}. Eswara[3] 研究了函子 F^{α} 作用下有限维不可约 gl_d-模的像模的结构. 林卫强等[4] 构造了一族从特殊线性李代数 sl_2 的模 $\boldsymbol{V}$ 到 L_q-模的函子 F_g^{α}, 并刻画了 $F_g^{\alpha}(V)$ 的结构. 当 q 不是单位根时, 本文直接由 t 维向量空间 $\boldsymbol{V}$ 构造了一类 L_q-模 $M(\alpha, a_1, a_2)$, 并刻画了 $M(\alpha, a_1, a_2)$ 的结构.

1　q-类似 Virasoro-Like 代数

为了表述方便, 首先引进一些符号和术语, 并作约定记号. 记 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$, $\Gamma = \mathbf{Z}\boldsymbol{e}_1 + \mathbf{Z}\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u} = \mathbf{C}\boldsymbol{e}_1 + \mathbf{C}\boldsymbol{e}_2$. 采用 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 来表示 Γ 中的向量, 并用 d_1, d_2 表示量子环面 $\mathbf{C}_q$ 上的度导子.

任意取定一个向量 $\boldsymbol{m} = m_1\boldsymbol{e}_1 + m_2\boldsymbol{e}_2\in\Gamma$, 简记量子环面 $\mathbf{C}_q$ 上的元素 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}$ 为 $x^{\boldsymbol{m}}$. 定义 $\Gamma\times\Gamma$ 到 $\mathbf{C}$ 的两个映射 σ, f 有

$$\sigma(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = q^{n_2m_1},$$
$$f(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = q^{n_2m_1 - n_1m_2},$$

其中: $\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{m} = m_1\boldsymbol{e}_1 + m_2\boldsymbol{e}_2\in\Gamma$. 定义 f 的根基为

$$\mathrm{rad}(f) = \{\boldsymbol{n}\in\Gamma \mid f(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = 1,\ \forall\boldsymbol{m}\in\Gamma\},$$

则由于 q 不是单位根, 有 $\mathrm{rad}(f) = \mathbf{0}$. 接着, 记 $\Gamma^* = \Gamma\backslash\mathbf{0}$, $D(\boldsymbol{m}) = \mathrm{ad}(x^{\boldsymbol{m}})$, 则 $\{D(\boldsymbol{m}) \mid \boldsymbol{m}\in\Gamma^*\}\cup\{d_1, d_2\}$ 构成 L_q 的一组基, 而且 $D(\boldsymbol{m})$ 是 L_q 的 $\boldsymbol{m}\neq\mathbf{0}$ 次空间的基, d_1, d_2 则是 L_q 的零次空间的一组基. 此外, 在 L_q 上有下列李运算成立. 即

$$[D(\boldsymbol{m}), D(\boldsymbol{n})] = g(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})D(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}),$$
$$[d_i, D(\boldsymbol{m})] = -[D(\boldsymbol{m}), d_i] = m_iD(\boldsymbol{m}),\qquad i = 1, 2,$$

收稿日期:　2008-02-25
通信作者:　温琴珠(1975-), 女, 讲师, 主要从事李代数的研究. E-mail: wqz146@hqu.edu.cn.
基金项目:　华侨大学科研基金资助项目(06HZR05)

$$[d_1, d_2] = 0.$$

其中: $\boldsymbol{m} = m_1\boldsymbol{e}_1 + m_2\boldsymbol{e}_2 \in \Gamma^*$, $\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2 \in \Gamma^*$, $g(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = q^{m_2 n_1} - q^{m_1 n_2}$.

下面, 构造 L_q-模 $M(\alpha, a_1, a_2)$. 把 $M(\alpha, a_1, a_2)$ 简记为 M.

定义 1　$\forall \alpha \in \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n} \in \Gamma$, $a_1, a_2 \in \mathbf{C}^*$ 和任意的 t 维向量空间 $\boldsymbol{V}$, 设 $v(\boldsymbol{n})$ 为与 $\boldsymbol{V}$ 线性同构的向量空间. 定义 L_q 在空间 $M = \oplus_{\boldsymbol{n}\in\Gamma} v(\boldsymbol{n})$ 上的作用为

$$D(\boldsymbol{m}) \cdot v(\boldsymbol{n}) = \sigma(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})(a_1^{m_1} a_2^{m_2} - f(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}))v(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n})$$

$$d_i \cdot v(\boldsymbol{n}) = (n_i + \alpha_i)v(\boldsymbol{n}), \qquad i = 1, 2.$$

其中: $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2) \in \Gamma^*$, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2) \in \Gamma$.

引理 1　M 是一个 $\boldsymbol{Z}^2$ 分次 L_q-模.

证明　直接验证即可得.

2　L_q-模 M 的结构

引理 2　(1) 如果不存在 $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 使得 $a_1 = q^{k_1}$, $a_2 = q^{k_2}$, 而 $a_1^{s_1} a_2^{s_2} = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$, 则必存在某个 $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}$, 使得 $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \neq f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{m})$ 且 $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \neq f(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}, \boldsymbol{m})$.

(2) 如果存在 $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 使得 $a_1 = q^{k_1}$, $a_2 = q^{k_2}$, 而 $a_1^{s_1} a_2^{s_2} = f(\theta + \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$. 其中: $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$, $\theta = -k_2\boldsymbol{e}_1 + k_1\boldsymbol{e}_2$. 必存在某个 $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}$, 使得 $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \neq f(\theta + \boldsymbol{r}, \boldsymbol{m})$ 且 $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \neq f(\theta + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}, \boldsymbol{m})$.

证明　(1) 假设对 $\forall \boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}$, 有

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{m}),$$

或

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} = f(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}, \boldsymbol{m}).$$

取 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e}_1$, 得 $a_1 = q^{r_2}$ 或 $a_1 = q^{r_2 + s_2}$; 取 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e}_2$, 得 $a_2 = q^{-r_1}$ 或 $a_2 = q^{-(r_1 + s_1)}$. 这与已知不存在 $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ 而使得 $a_1 = q^{k_1}$, $a_2 = q^{k_2}$ 的条件相矛盾.

(2) 假设对 $\forall \boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}$, 有

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} = f(\theta + \boldsymbol{r}, \boldsymbol{m}),$$

或

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} = f(\theta + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}, \boldsymbol{m}).$$

即有

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{m}) = q^{r_2 m_1 - r_1 m_2} = 1,$$

或

$$f(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}, \boldsymbol{m}) = q^{(r_2 + s_2)m_1 - (r_1 + s_1)m_2} = 1.$$

因为 q 不是单位根, 所以 $r_2 m_1 = r_1 m_2$ 或 $(r_2 + s_2)m_1 = (r_1 + s_1)m_2$. 取 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e}_1$, 得 $r_2 = 0$ 或 $r_2 + s_2 = 0$; 取 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e}_2$, 得 $r_1 = 0$ 或 $r_1 + s_1 = 0$; 取 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, 得 $r_2 = r_1$ 或 $r_2 + s_2 = r_1 + s_1$.

下面分两种情形讨论.

情形 1　当 $r_2 = 0$ 时, 由 $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ 可得, $r_1 \neq 0$, 故 $r_2 \neq r_1$. 于是, $r_1 + s_1 = 0$, $r_2 + s_2 = r_1 + s_1$, 即 $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$, 这与已知的 $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$ 矛盾.

情形 2　当 $r_2 \neq 0$ 时, 则 $r_2 = -s_2 \neq 0$, 又由于 $a_1^{s_1} a_2^{s_2} = f(\theta + \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$, 可知 $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = q^{r_2 s_1 - r_1 s_2} = 1$. 所以, 可得 $r_2 s_1 = r_1 s_2$. 于是, $-s_2 s_1 = r_1 s_2$, 即 $-s_1 = r_1$, 即 $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$. 这与已知的 $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$ 矛盾.

定理 3　设 $v_1, v_2, \dots, v_t$ 为 t 维向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基, 那么

(1) 若不存在 $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 使得 $a_1 = q^{k_1}$, $a_2 = q^{k_2}$, 则 $M = \oplus_{i=1}^{t} M_i$. 其中: $M_i = \oplus_{\boldsymbol{r}\in\Gamma} \mathbf{C}v_i(\boldsymbol{r})$ 为 q-类似的 Virasoro-Like 代数 L_q 的不可约模.

(2) 若存在 $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 使得 $a_1 = q^{k_1}$, $a_2 = q^{k_2}$, 则 $M = \oplus_{i=1}^{t} M_i$, $M_i = M_{i_1} \oplus M_{i_2}$. 其中: $M_{i_1} = \mathbf{C}v_i(\theta)$, $M_{i_2} = \oplus_{\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}} \mathbf{C}v_i(\theta + \boldsymbol{r})$, $\theta = -k_2\boldsymbol{e}_1 + k_1\boldsymbol{e}_2 \in \Gamma$ 且 M_{i_1}, M_{i_2} 为 L_q 的不可约模.

证明　(1) 显然, M_i 是一个 L_q-模. 下证 M_i 的不可约性.

设 P 为 M_i 的一个非平凡子模, 则存在 $\boldsymbol{r} \in \Gamma$, 使得 $v_i(\boldsymbol{r}) \in P$. 且对 $\forall \boldsymbol{s} \in \Gamma^*$, 有 $D(\boldsymbol{s}) \cdot v_i(\boldsymbol{r}) = \sigma(\boldsymbol{s},$

$\boldsymbol{r})(a_1^{s_1}a_2^{s_2}-f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}))v_i(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r})$.

下面分两种情形讨论.

情形 1 若 $a_1^{s_1}a_2^{s_2}\neq f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$, 则 $v_i(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r})\in P$.

情形 2 若 $a_1^{s_1}a_2^{s_2}=f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$, 则由引理 2 的(1)可知, 必存在某个 $\boldsymbol{m}\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\neq f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})$ 且 $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\neq f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s},\boldsymbol{m})$. 由 $a_1^{s_1}a_2^{s_2}=f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$, $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\neq f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})$, 可得 $a_1^{s_1+m_1}a_2^{s_2+m_2}\neq f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}+\boldsymbol{m})$. 用 $D(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{m})$ 作用在 $v_i(\boldsymbol{r})$ 上可知, $v_i(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}+\boldsymbol{m})\in P$. 又由 $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\neq f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s},\boldsymbol{m})$ 可得, $a_1^{-m_1}a_2^{-m_2}\neq f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}+\boldsymbol{m},-\boldsymbol{m})$; 用 $D(-\boldsymbol{m})$ 作用在 $v_i(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}+\boldsymbol{m})$ 上可知, $v_i(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})\in P$.

由以上讨论可得 $M_i\subset P$, 所以 M_i 是不可约模.

(2) 显然, M_{i_1} 为不可约模. 下证 M_{i_2} 为不可约模.

由定义 1 可直接验证 M_{i_2} 为 L_q-模. 设 P 为 M_{i_2} 的一个非平凡子模, 则存在 $\boldsymbol{r}\in\Gamma^*$, 使得 $v_i(\theta+\boldsymbol{r})\in P$. 对于 $\forall\boldsymbol{s}\in\Gamma^*$, $D(\boldsymbol{s})\cdot v_i(\theta+\boldsymbol{r})=\sigma(\boldsymbol{s},\theta+\boldsymbol{r})(a_1^{s_1}a_2^{s_2}-f(\theta+\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}))v_i(\theta+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})$, 当 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 有 $v_i(\theta+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})\in P$.

下面分两种情形讨论.

情形 1 若 $a_1^{s_1}a_2^{s_2}\neq f(\theta+\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$, 则 $\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$, 可得 $v_i(\theta+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})\in P$.

情形 2 若 $a_1^{s_1}a_2^{s_2}=f(\theta+\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$, 则由引理 2 的(2)可知, 必存在某个 $\boldsymbol{m}\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\neq f(\theta+\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})$ 且 $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\neq f(\theta+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s},\boldsymbol{m})$. 由于 $a_1^{s_1}a_2^{s_2}=f(\theta+\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$, $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\neq f(\theta+\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})$, 可得 $a_1^{m_1+s_1}a_2^{m_2+s_2}\neq f(\theta+\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}+\boldsymbol{s})$.

用 $D(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{s})$ 作用在 $v_i(\theta+\boldsymbol{r})$ 上可知, $v_i(\theta+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m}+\boldsymbol{s})\in P$. 又由 $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\neq f(\theta+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s},\boldsymbol{m})$ 可得, $a_1^{-m_1}a_2^{-m_2}\neq f(\theta+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}+\boldsymbol{m},-\boldsymbol{m})$; 用 $D(-\boldsymbol{m})$ 作用在 $v_i(\theta+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m}+\boldsymbol{s})$ 上可知, $v_i(\theta+\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})\in P$.

由以上讨论可知, $M_{i_2}\subset P$, 所以 M_{i_2} 为 L_q 的不可约模.

参考文献:

[1] MENG Dao-ji, JIANG Cui-po. The derivation algebra and the universal central extension of the q-analog of the virasoro-like algebra[J]. Comm Alg, 1998, 26(4): 1335-1346.

[2] LARSSON T A. Conformal fields: A class of representations of Vect (n)[J]. Internat J Modern Phys (A), 1993, 8(6): 1181-1182.

[3] RAO S E. Irreducible reqresentations of the Lie-algebra of the diffeomorphisms of a d-dimensional torus[J]. J Alg, 1996, 182(2): 401-421.

[4] 林卫强, 谭绍滨. 量子环面上斜导子李代数的表示[J]. 数学进展, 2005, 34(4): 477-487.

Modules of the q-Analog of the Virasoro-Like Algebra

WEN Qin-zhu

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: A class of modules $M(\alpha, a_1, a_2)$ for Lie algebra L_q is constructed, and the structure of the modules is studied. It is proved that the modules are completely reducible. A irreducible quotient modules are obtaied.

Keywords: quantnr tours; derivation; q-analog; Virasoro-Like algebra; irreducible module

(责任编辑: 陈志贤　　英文审校: 张金顺, 黄心中)